

1. Introducció

No sé què va ser el que em va motivar a fer aquest treball sobre el caos, realment no sabia res quan el vaig començar. El tema em va fascinar tant que em vaig aventurar a fer el treball sense saber si seria capaç de fer-lo. Realment és un tema molt interessant i que et fa plantejar qüestions filosòfiques, en seria un exemple més la pel·lícula "l'efecte papallona" que parla d'un home que té la capacitat de viatjar al passat per canviar certes coses de la seva vida. Qui mai s'ha plantejat això? Qui mai ho voldria fer? Jo hauria d'estar molt apurat. Els que ja heu vist la pel·lícula entendreu el perquè de la meva resposta i els que no, l'entendran després d'haver llegit aquest treball.

El treball l'he intentat enfocar com una investigació, és a dir, veure primer fenòmens, successos, etc... i després explicar-los.

En el capítol 2, *Una mirada al caos*, mostro dues experiències: la primera és anàloga a l'experiència que va tenir *Edward Lorenz*; i en la segona analitzo les òrbites d'un pèndol magnètic construït per mi.

En el capítol 3, *Rumb al caos!: la funció logística*, mostro com evoluciona un sistema cap al caos, tot estudiant les particularitats de la funció.

Posteriorment, en el capítol 4, ho relaciono amb *els fractals* i en faig una breu síntesi per després explicar els *atractors estranys o caòtics* en l'últim capítol.

El batec de les ales d'una papallona al Brasil pot provocar un tornado a Texas... el primer cop que vaig sentir aquesta frase me'n vaig enriure, ara ben sé que és real...

2. Una mirada al caos

*“But for a nail the shoe was lost,
But for a shoe the horse was lost,
But for a horse the soldier was lost,
But for a soldier the war was lost,
But for a war the kingdom was lost.*

*Bur for a nail the kingdom was lost” **

Diem que quelcom és **predictible** si se’n pot saber amb certesa el seu estat futur o la seva actuació futura.

És evident que si es deixa anar un cos des d’una certa alçada i no hi actua cap força més que la gravetat, el cos caurà amb una acceleració de $-9,8\text{m/s}^2$. Què passaria si escalféssim una olla plena d’aigua fins a sobrepassar els 100°C ?

Als humans ens agraden les coses predictibles perquè ens dóna una sensació de control de les nostres vides, però les coses no són exactament així; per exemple “*vaig a dormir d’hora per demà al matí no tenir son*”; però ningú assegura que l’endemà no tinguem son ja que pot passar qualsevol cosa que no depèn de tu, o sí, però ho ignoraves, i que al final no et deixi dormir. És cert que en la majoria de casos a l’endemà no es tindrà son. Però quan el temps és molt més llarg també és molt més impredecible. Així, ningú pot saber com estaran els valors de les accions d’una determinada empresa d’aquí 5 anys. Això fa que la vida sigui una caixa de sorpreses. Qualsevol fet que succeeixi pot canviar-te la vida fins hi tot sense que te n’adonis d’aquest petit fet, i és el que popularment es coneix com a atzar.

El terme **caos** prové del grec ($\chi\alpha\omicron\varsigma$), que per ells era el què hi havia abans de que les coses existissin. A finals del segle XIX i principis del XX alguns científics s’anaren adonant que en certs sistemes un petit error en les condicions inicials podia a llarg termini ser impredecible. *Henri Poincaré* (1854 - 1912) ja es va topar amb el caos, igual que algun dels seus predecessors com *Charles-Eugène Delaunay*, i contemporanis, en l’estudi del problema dels tres cossos, que consistia en l’estudi de la posició en el temps de 3 cossos que es mouen a causa de les forces gravitatòries que actuen entre ells.

Però el pare de la teoria fou *Edward Norton Lorenz* (Connecticut, 1917 – 2008) que va estudiar Matemàtiques i quan acabà va treballar per l’exèrcit de l’Aire dels Estats Units durant la Segona guerra mundial com a meteoròleg (1942-46), posteriorment va començar la seva carrera com a meteoròleg al *Massachusetts Institute of Technology (MIT)* al Departament de Meteorologia. *Lorenz* va dissenyar un model que consistia en dotze equacions diferencials que representen canvis de pressió, velocitat del vent, temperatura...

* Traducció: “Només per un clau es va perdre la ferradura/ només per una ferradura es va perdre el cavall/ només per un cavall es va perdre el soldat/ només per un soldat es va perdre la guerra/ només per una guerra es va perdre el regne// només per un clau es va perdre el regne”.

De les equacions de *Lorenz* les més importants són:

$$\frac{dx}{dt} = a y - a x$$

$$\frac{dy}{dt} = r x - y - x z$$

$$\frac{dz}{dt} = x y + b z$$

Aquestes equacions intenten modelar els processos de convecció a l'atmosfera (com l'aire s'escalfa, llavors s'eleva, es refreda, i cau de nou). On x, y i z són variables i a, b i r són constants.

L'any 1961 *Lorenz* va iniciar un projecte per simular patrons del clima utilitzant ordinadors, però a causa de l'escàs desenvolupament tecnològic de l'època no va poder crear patrons complexos. Quan estava realitzant un experiment es va topa casualment (o no) amb **l'efecte papallona** i el **caos determinista**.

L'experiència que va tenir *Lorenz* és similar a l'experiència que realitzarem a continuació. Ell utilitzava equacions diferencials relacionades amb la meteorologia, però nosaltres farem el mateix amb l'equació:

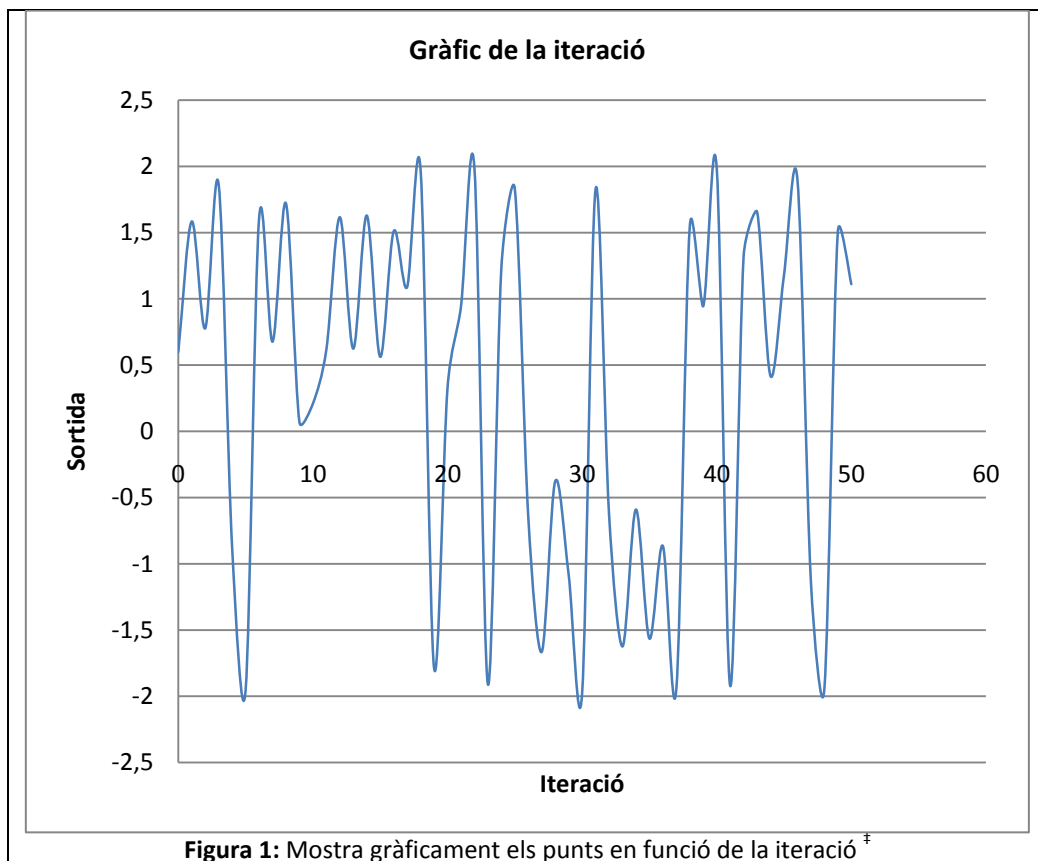
$$x_{n+1} = 3x_n \left(1 - \frac{x_n^2}{3} \right)$$

Amb la qual el valor que obtindrem el tornarem a introduir dintre la funció que ens donarà la següent entrada (d'això s'anomena **iterar**, l'aplicació repetida d'una transformació)[†]. Al fer 50 iteracions obtenim els valors de la *Taula 1*:

Iteració	Valor	Iteració	Valor
0	0,6	25	1,83081154
1	1,584	26	-0,64420928
2	0,7776553	27	-1,66527739
3	1,86268059	28	-0,3777702
4	-0,87467565	29	-1,0793989
5	-1,95484979	30	-1,9805869
6	1,60578734	31	1,82753599
7	0,67675428	32	-0,62115718
8	1,72031185	33	-1,62380659
9	0,06971931	34	-0,58985124
10	0,20881903	35	-1,56433002
11	0,61735146	36	-0,86487361
12	1,61676765	37	-1,94768987
13	0,62417314	38	1,54548379

[†] Les iteracions estan fetes amb el programa Microsoft Excel 2007.

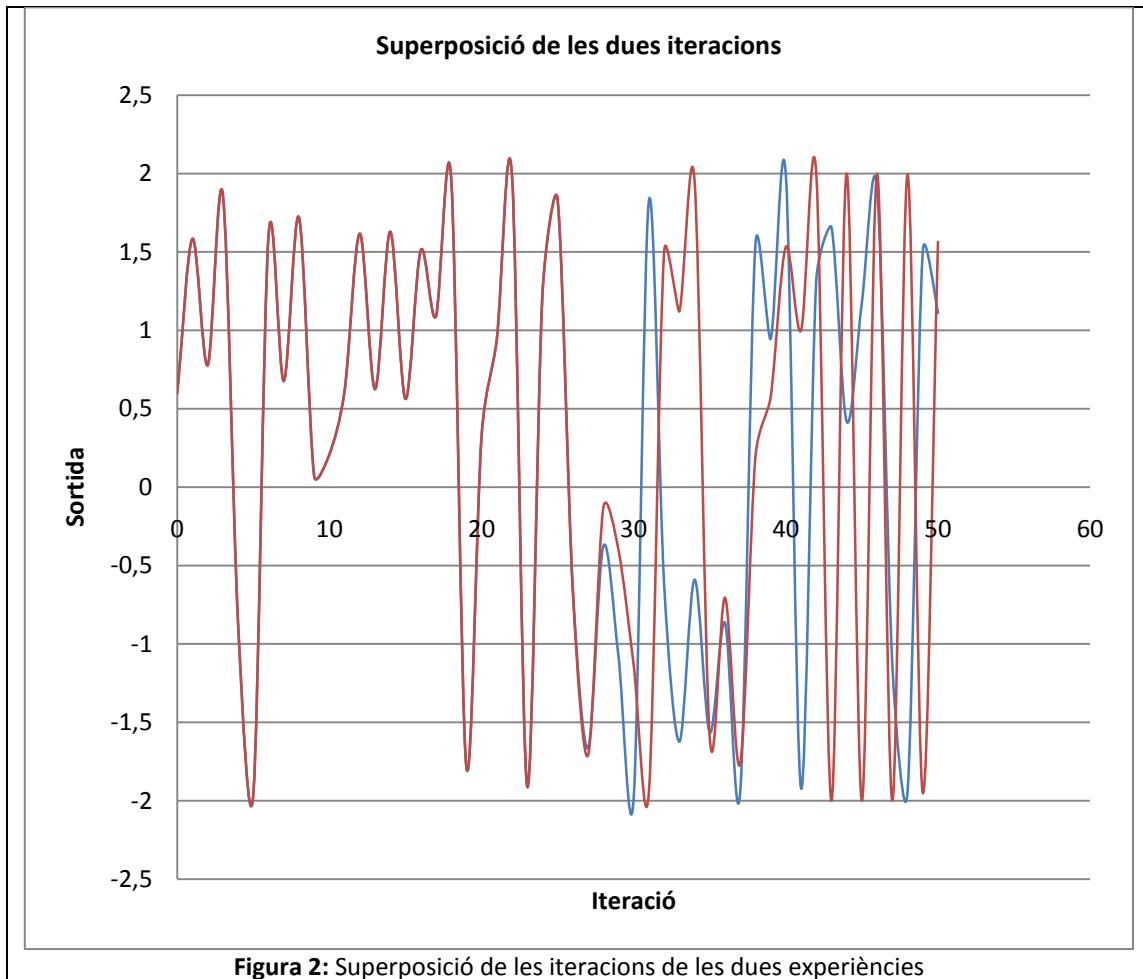
14	1,62934649	39	0,94503221
15	0,56249931	40	1,99110171
16	1,50952007	41	-1,92038976
17	1,08889102	42	1,32103001
18	1,97559278	43	1,65773376
19	-1,78389472	44	0,41761429
20	0,32516896	45	1,18001022
21	0,94112519	46	1,89695597
22	1,98980534	47	-1,13521801
23	-1,90887063	48	-1,94267595
24	1,22890625	49	1,50361148
		50	1,11139821



Ara repetim l'experiment amb el mateix programa, només que **copiarem** el valor de la iteració número 11 i l'introduïrem de nou a la funció, repetint l'experiència a partir d'allà, tal com es veu en la *Taula 2*.

† Diverses vegades en el treball uneixo els punts entre una iteració i la següent, realment no ho hauria de fer, ja que no existeix, per exemple, fer mitja iteració, però ho faig perquè es vegi, visualment, millor les diferències entre elles.

Taula 2					
	Valors de la 1a experiència	Valors de la 2a experiència		Valors de la 1a experiència	Valors de la 2a experiència
0	0,6	0,6	25	1,83081154	1,83445815
1	1,584	1,584	26	-0,64420928	-0,67001147
2	0,7776553	0,7776553	27	-1,66527739	-1,70925596
3	1,86268059	1,86268059	28	-0,3777702	-0,13408098
4	-0,87467565	-0,87467565	29	-1,0793989	-0,39983248
5	-1,95484979	-1,95484979	30	-1,9805869	-1,13557781
6	1,60578734	1,60578734	31	1,82753599	-1,94236387
7	0,67675428	0,67675428	32	-0,62115718	1,50101491
8	1,72031185	1,72031185	33	-1,62380659	1,12118944
9	0,06971931	0,06971931	34	-0,58985124	1,95415946
10	0,20881903	0,20881903	35	-1,56433002	-1,59994695
11	0,61735146	0,61735146	36	-0,86487361	-0,70424827
12	1,61676765	1,61676765	37	-1,94768987	-1,76346188
13	0,62417314	0,62417316	38	1,54548379	0,19362426
14	1,62934649	1,62934652	39	0,94503221	0,57361374
15	0,56249931	0,56249916	40	1,99110171	1,53210353
16	1,50952007	1,50951977	41	-1,92038976	0,9999408
17	1,08889102	1,08889219	42	1,32103001	1,99999999
18	1,97559278	1,97559213	43	1,65773376	-1,99999991
19	-1,78389472	-1,78388907	44	0,41761429	1,99999915
20	0,32516896	0,32513198	45	1,18001022	-1,99999234
21	0,94112519	0,94102599	46	1,89695597	1,99993102
22	1,98980534	1,98977131	47	-1,13521801	-1,99937918
23	-1,90887063	-1,90856844	48	-1,94267595	1,99441497
24	1,22890625	1,22651001	49	1,50361148	-1,9499217
			50	1,11139821	1,56421673



El resultat et deixa perplex. La causa d'aquest gran error és que l'ordinador no et mostra tots els decimals i al copiar manualment només hem copiat els decimals visibles i per tant hem tingut un error de l'ordre de 10^{-9} . Aquest error, que als nostres ulls és insignificant (seria l'equivalent a que mesurant 1000 km ens equivoquéssim en un mil·límetre) ha produït aquests canvis en un cert període de temps. Si això fos la predicció meteorològica i cada iteració un dia ens adonaríem que en 15 dies aproximadament hauríem perdut molta precisió. Això és **l'efecte papallona**, "el batec de les ales d'una papallona al Brasil pot produir un tornado a Texas", és a dir, que un petit canvi en les condicions inicials pot produir canvis inesperats.

La definició de **caos** en un diccionari qualsevol diu:

"Caos m 1 mit Estat de desorganització que precedí l'organització del món 2 fig confusió i desordre complet. 3 geomorf apilotament confús de bolcs, de roques"

Però en Matemàtiques es refereix a un comportament estocàstic (aleatori) d'un sistema determinista.

El caos és **determinista** perquè si es coneix un sistema i les condicions inicials d'aquest sistema, es pot saber amb exactitud el futur d'aquest sistema. El problema la majoria de vegades rau en conèixer amb exactitud absoluta les condicions inicials, tal com hem vist en l'experiència anterior, on una variació minsa provoca grans canvis al llarg del temps.

L'**atzar** es defineix com un conjunt de causes inconegudes que produeixen un efecte no previsible.

La definició “popular” i la Matemàtica sobre el *caos* són diferents, així la definició “popular” és únicament percepció del resultat, en canvi en la Matemàtica el fet de dir que el sistema és determinista implica l'existència d'unes lleis i d'unes condicions (ordre) que fan arribar a la complexitat (desordre).

Lorenz va arribar a la conclusió que el clima sol ser impredecible més enllà d'un període de dues setmanes i fins al moment és subjecte a canvis.

Ara mostraré la **sensibilitat en les condicions inicials** ajudat per un pèndol que he construït.



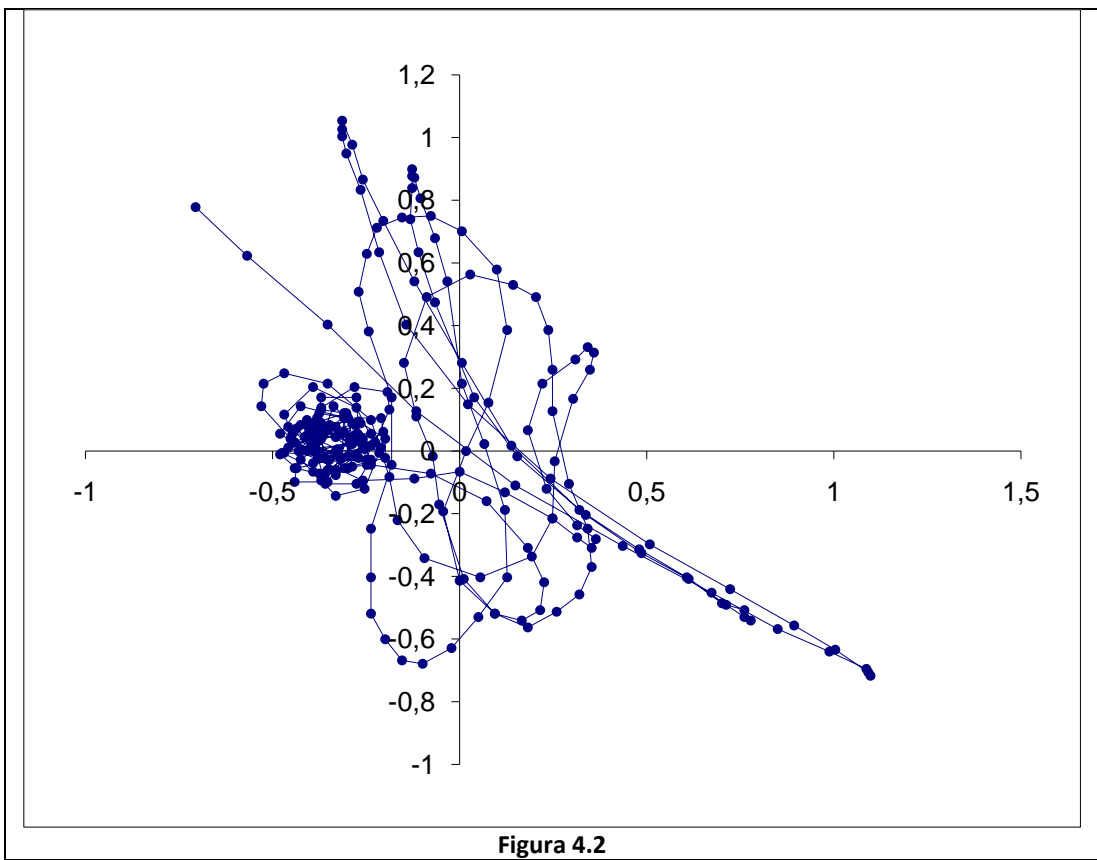
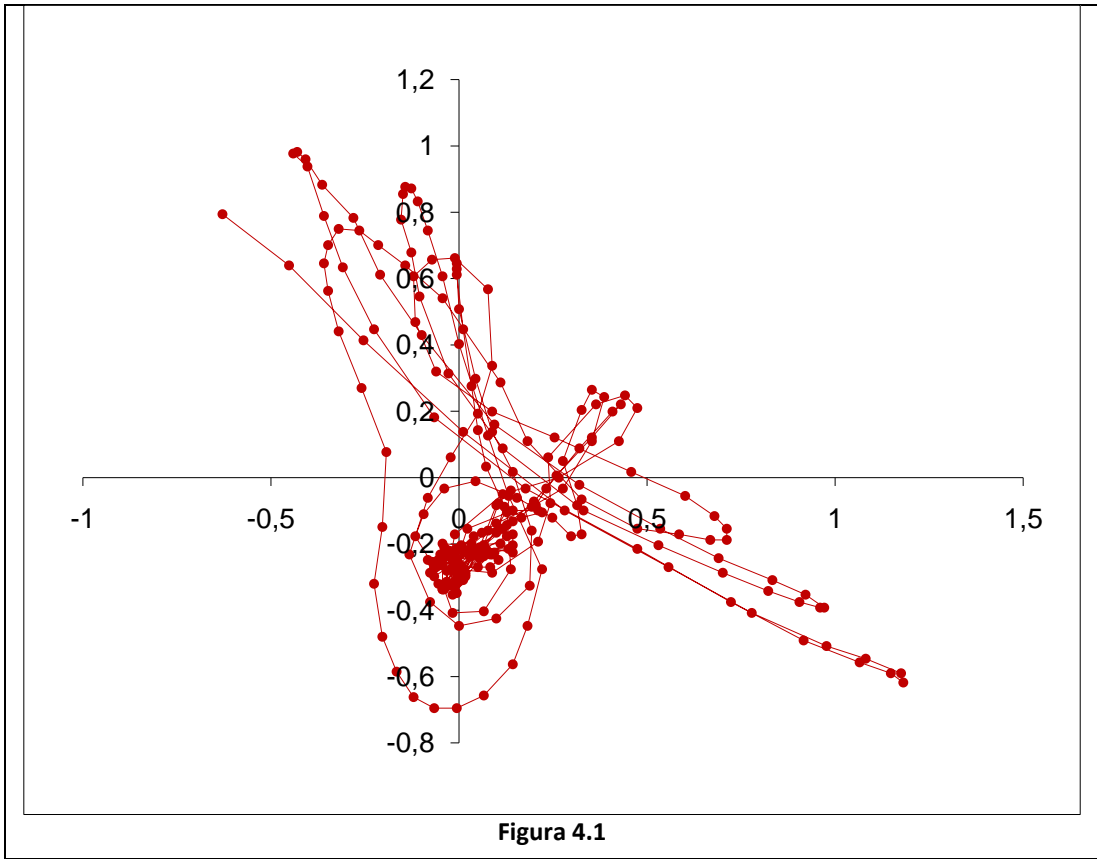
Es tracta d'un pèndol d'un metre d'alçada, fet de fusta, amb la base de plàstic transparent on hi ha enganxats quatre imants aproximadament a la mateixa distància del punt on cau el pèndol, també constituït per un imant.

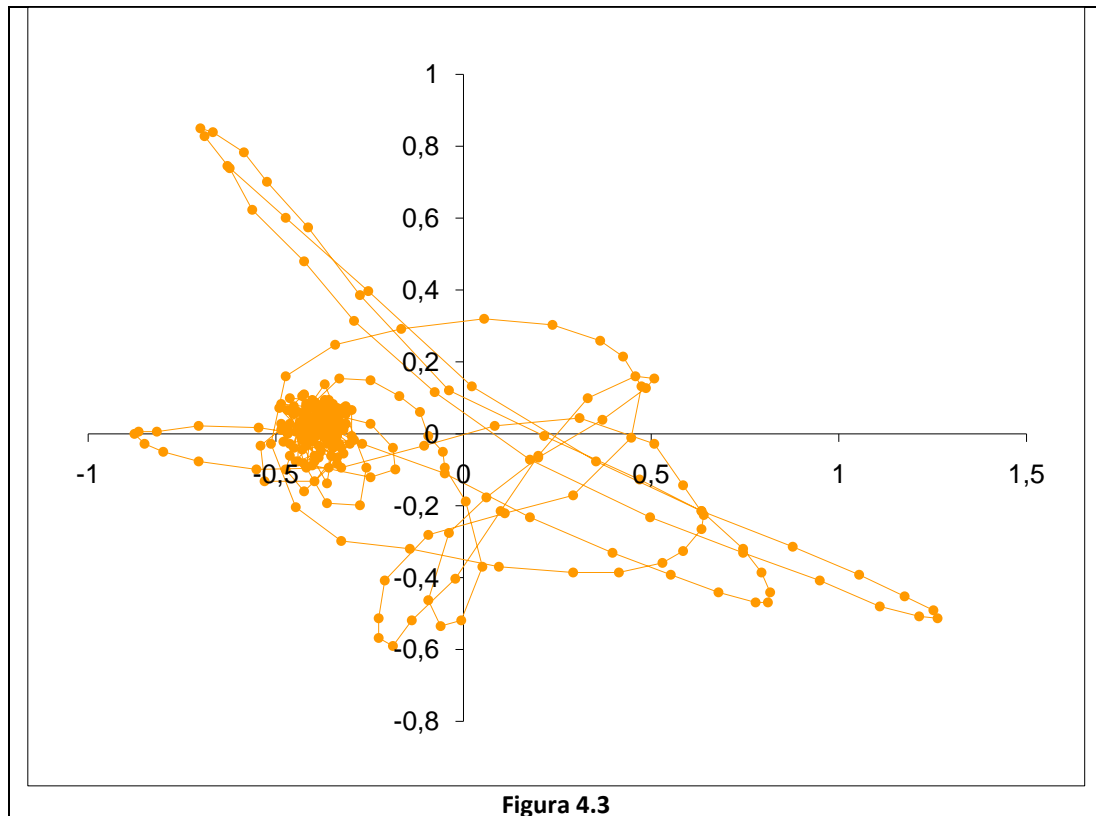
L'objectiu de l'experiència és demostrar que el pèndol no segueix mai la mateixa òrbita llançat des del mateix punt.

Per poder demostrar-ho, filmaré diferents òrbites que segueix el pèndol començades aparentment des d'un mateix punt, des d'una cantonada concreta, amb iguals condicions inicials (veure Annexos CD).

Ara amb el programa *Multilab* analitzarem les òrbites. Analitzarem per fotogrames el vídeo i representem en un gràfic els punts on estava el pèndol en els fotogrames analitzats.

He analitzat 3 vídeos i he obtingut aquests gràfics:





Recordem que hi havia quatre possibles destins, els quatre imants, en el gràfic de les figures 4.2 i 4.3 es veu que acaben en el mateix imant, per contra el primer gràfic de la figura 4.1 en un altre. No només acaben en llocs diferents havent-los deixat anar des del mateix punt sinó que les òrbites són diferents fins i tot en els que acaben en el mateix imant!!!.

Això, és una mostra de la sensibilitat a les condicions inicials que tenen els sistemes caòtics.

3. Rumb al caos!: la funció logística

En ecologia, de vegades, pot ser necessari fer una aproximació exacte de quina població, d'una espècie en concret, tindrà aquesta espècie l'any vinent.

Per exemple, suposem un bosc on des de fa 20 anys ha desaparegut una espècie concreta d'ocell i els biòlegs introdueixen 4 ocells, i observen que creixen a raó d'un 50% anualment durant 3 anys.

Si volguéssim fer un model de creixement amb aquestes dades podríem fer:

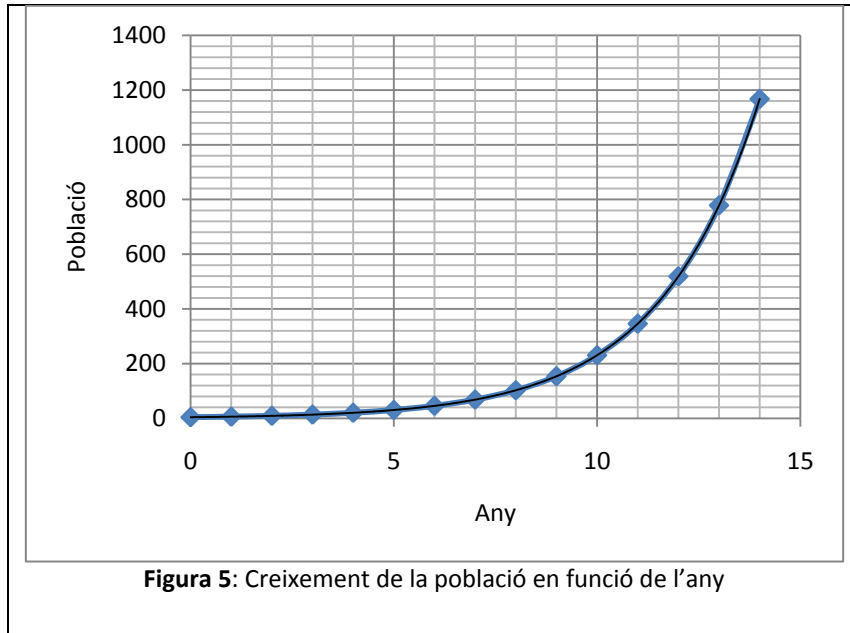
$$x_{n+1} = 1,5 \cdot x_n$$

Per tant;

$$x_n = x_0 \cdot 1,5^n$$

On x és la població i la n els anys.

En canvi si mirem el gràfic de la funció ens adonarem de que no pot ser correcte el model de creixement.



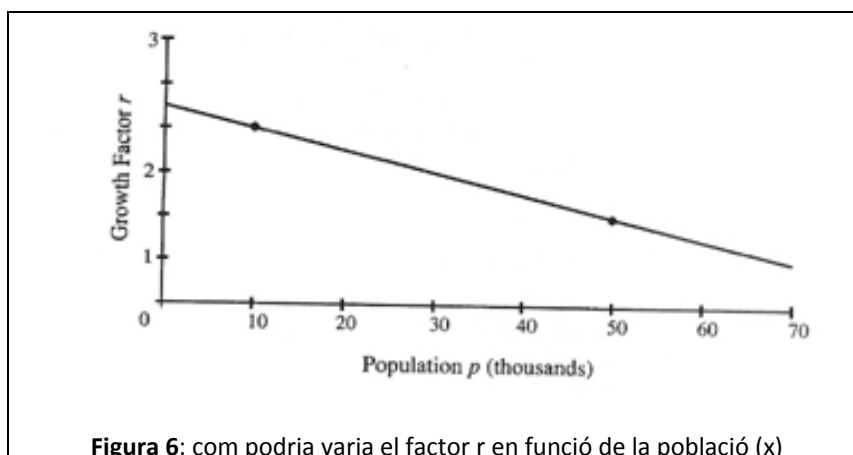
La població d'ocells no pot tendir a infinit!, perquè no hi ha aliment suficient per tants ocells, per tant hem de buscar un model millor per expressar-ho.

Per això, es va crear la **funció logística** que descriu la població d'una espècie i no té els problemes de la superpoblació.

El model que teníem era:

$$x_{n+1} = r x_n$$

Però r ha de ser variable, perquè com hem dit la funció no pot tendir a l'infinit per ser un bon model. r serà més gran quan x és petit i r serà més petit quan x sigui gran.



Una manera de representar la evolució de r en funció de la població és el gràfic de la *Figura 6*. A partir d'aquest gràfic podem trobar l'equació de la recta (indico que el pendent és negatiu, i $m > 0$).

$$\frac{r_2 - r_1}{x_2 - x_1} = -m$$

$$\frac{r - r_1}{x - x_1} = -m ; r = -mx + mx_1 + r_1$$

Direm que:

$$mx_1 + r_1 = k$$

I llavors obtenim:

$$r = -mx + k$$

Ho substituïm a la primera expressió i obtenim:

$$x_{n+1} = rx_n$$

$$x_{n+1} = (-mx_n + k)x_n$$

$$x_{n+1} = -mx_n^2 + kx_n$$

Definirem z com: $z = k/m$

$$x_{n+1} = kx_n \left(1 - \frac{m}{k}x_n\right)$$

$$x_{n+1} = kx_n \left(1 - \frac{x_n}{z}\right)$$

Aquesta és la *funció logística*, on la x_n és la població de l'espècie en el temps n , z és el màxim de població que pot assolir l'ecosistema i per la qual si s'hi arriba la població desapareix a causa de la sobre competència, i k és una constant que depèn de la reproductivitat, l'aliment disponible, del medi... que varia segons l'espècie i l'entorn.

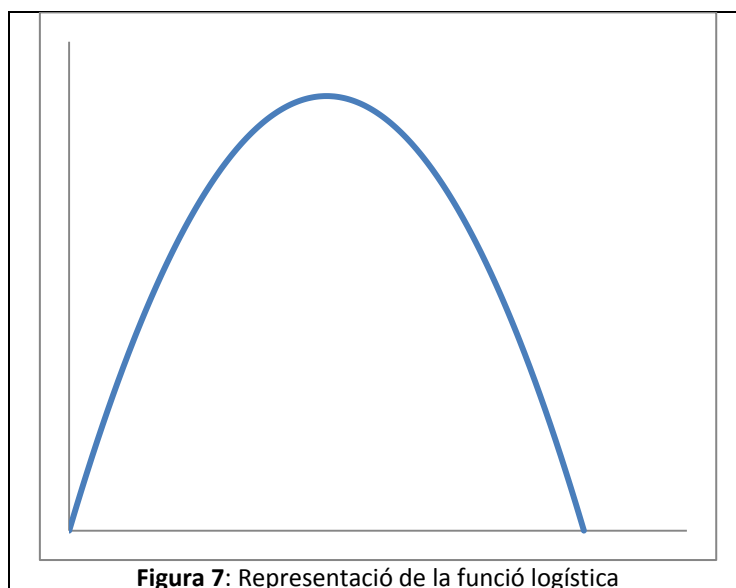


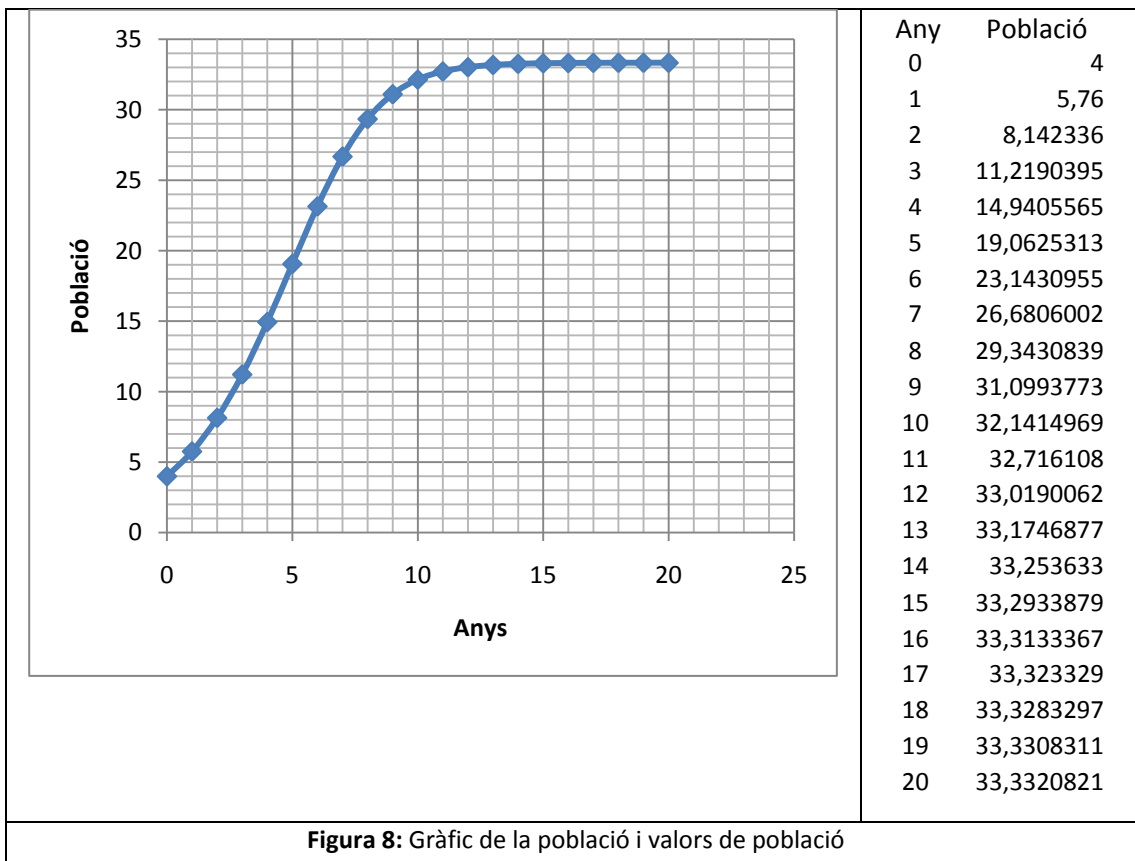
Figura 7: Representació de la funció logística

3.1. Els atractors

Suposem $k = 1,5$ i una població màxima pel bosc de 100 exemplars $z = 100$

$$x_{n+1} = 1,5x_n \left(1 - \frac{x_n}{100}\right)$$

I observem que a l'any següent tenim 5-6 exemplars, al següent 8 exemplars, però al cap de 12 anys la població queda estancada en un valor concret 33 exemplars.



La població ha tendit a un valor en concret, biològicament és un fet lògic perquè la població d'ocells no podia créixer fins a l'infinit. Ara comprovem si això és complex reintroduint enlloc de 4 ocells reintroduint-ne 90 en el mateix bosc.

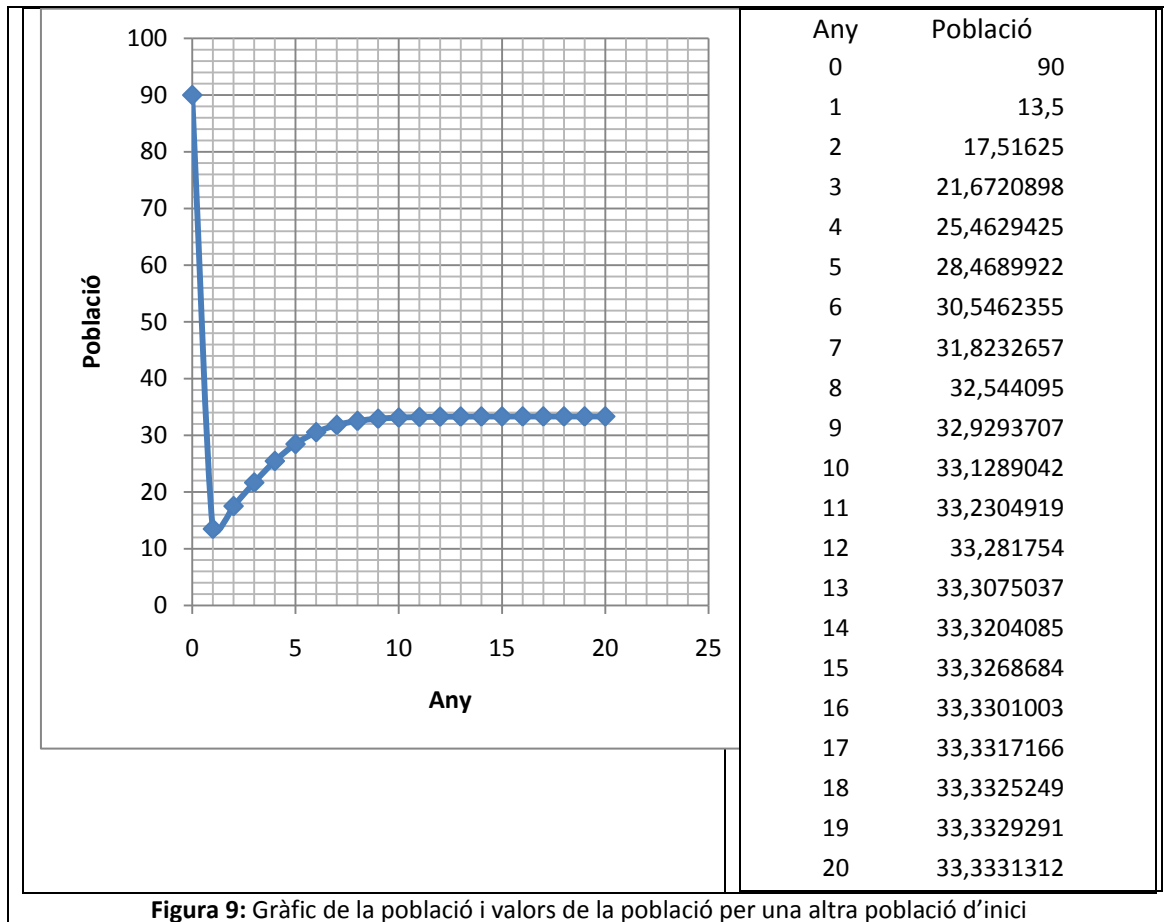


Figura 9: Gràfic de la població i valors de la població per una altra població d'inici

La població d'ocells no tenia prou menjar i la competència ha fet disminuir la població d'aquests i al cap de pocs anys ha anat a parar fins al mateix punt que en el cas anterior. Diem doncs que aquest punt és un **atractor**.

La definició probablement no ens diu gaire cosa de moment: *“Un atractor és un conjunt d'estats (punts en l'espai de fase) invariant sota la dinàmica, cap al qual els estats veïns en la conca d'atracció s'hi apropen asimptòticament. Un atractor és definit com la unitat més petita que no pot ser descomposta en dos o més atractors amb diferents conques d'atracció.”*

Aquest punt fix és un atractor que es calcula iterativament resultant:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1,5x_n \left(1 - \frac{x_n}{100} \right) \right) = 33,3333 \dots$$

I és evident que ha de complir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

I si anomenem: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

Aquest punt ha de complir que:

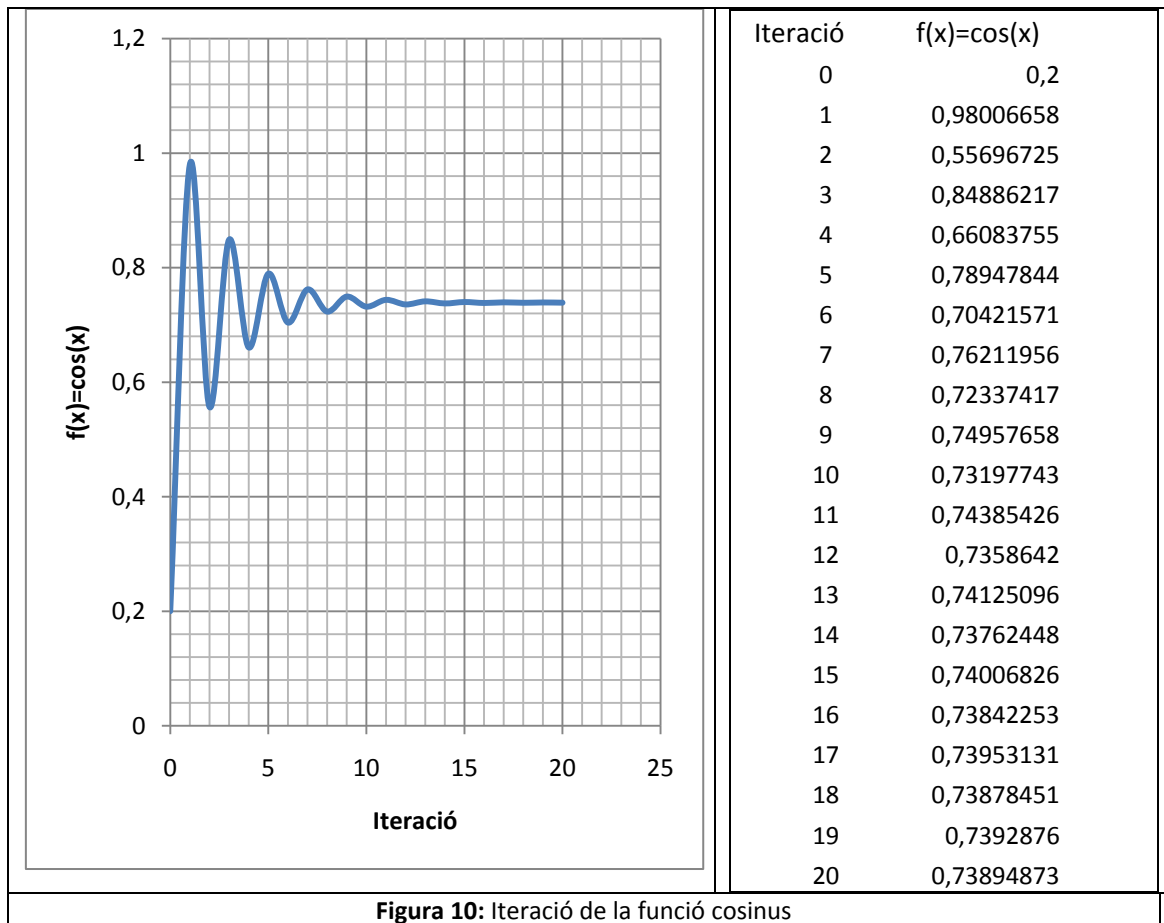
$$x = kx \left(1 - \frac{x}{z} \right); 0 = (k - 1)x - \frac{k}{z}x^2;$$

una equació de segon grau que té dues solucions (pels valors de $z = 100$ i $k = 1,5$)

$$x = 0 \text{ i } x = \frac{z^{(k-1)}}{k} = \frac{50}{1,5} = 33,3$$

I què representen les dues solucions de l'equació de segon grau? Experimentalment veiem que el 33,333333... és un atractor, el qual compleix que $x = f(x)$, però el 0 també ho compleix i no és un atractor. Per què el 33,3 és l'atractor i el 0 no?. Aquesta pregunta la resoldrem més endavant.

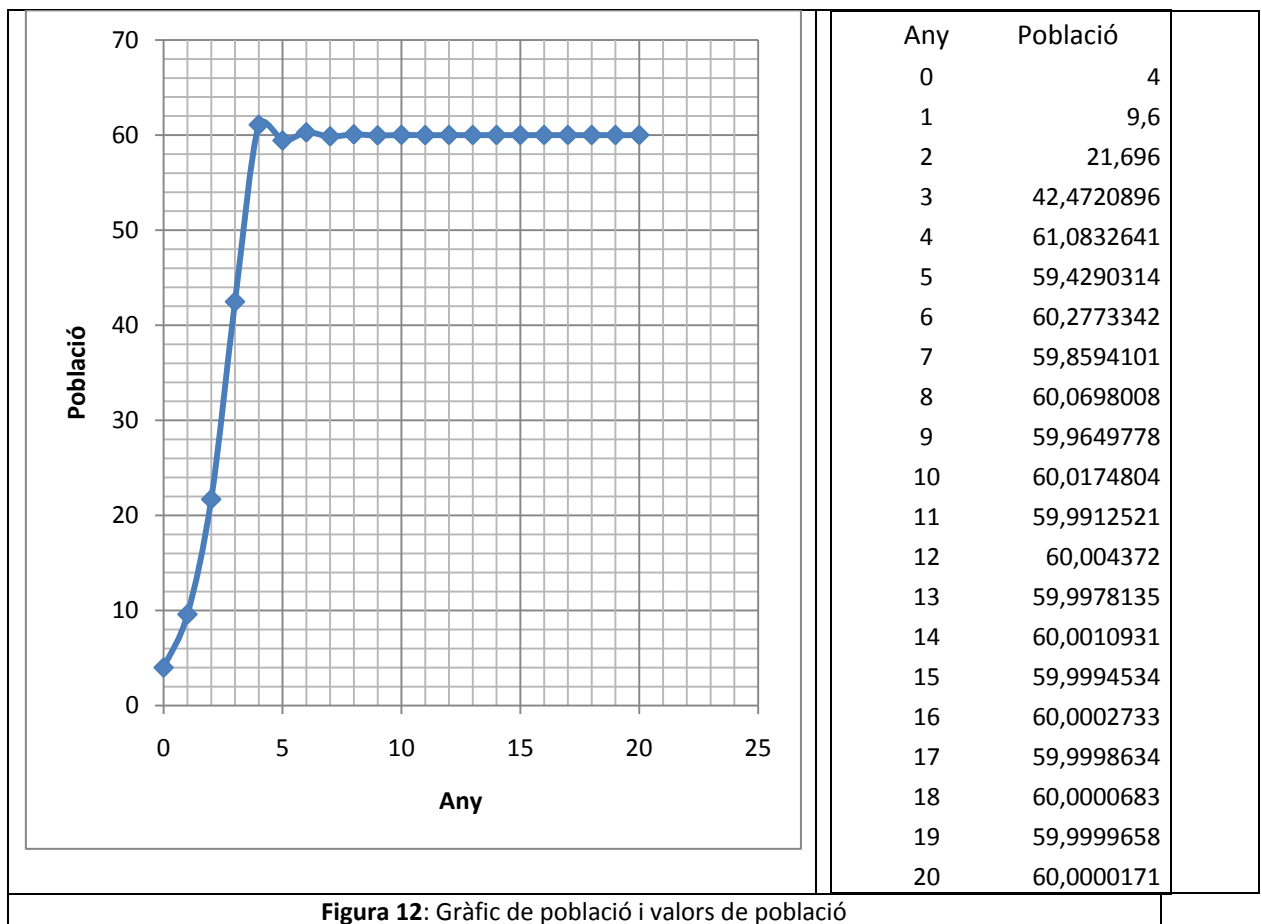
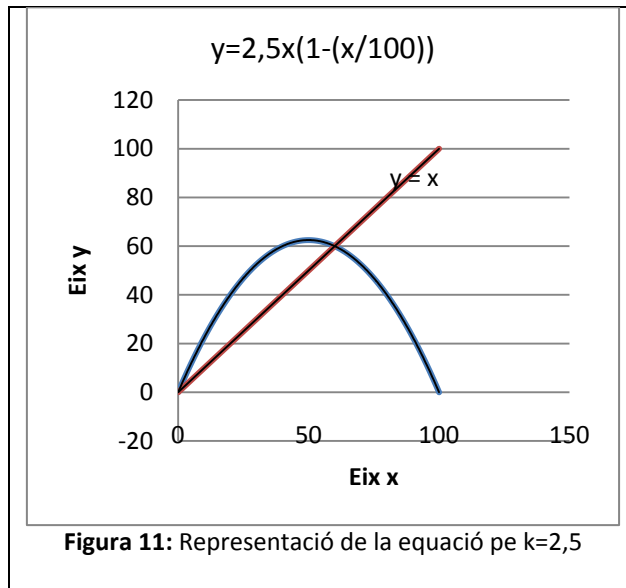
Aquest fet no succeeix només en la funció logística sinó que també passa en moltes altres funcions com per exemple a la iteració de la funció $x_{n+1} = \cos(x_n)$. A la iteració, és a dir, agafant els valors de sortida de la funció com a valors d'entrada i aquests de sortida altre cop com d'entrada i així successivament, té un atractor.



Com es pot comprovar la funció cosinus tendeix a un atractor. I aquest atractor compleix $x = \cos(x)$ i la única manera de trobar el valor és iterant.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos x_n) = 0,73908513 \dots$$

Ara provem de canviar la constant en la funció logística. Prendrem k= 2,5 (suposem que introduïm els ocells en un bosc més ric en aliments):

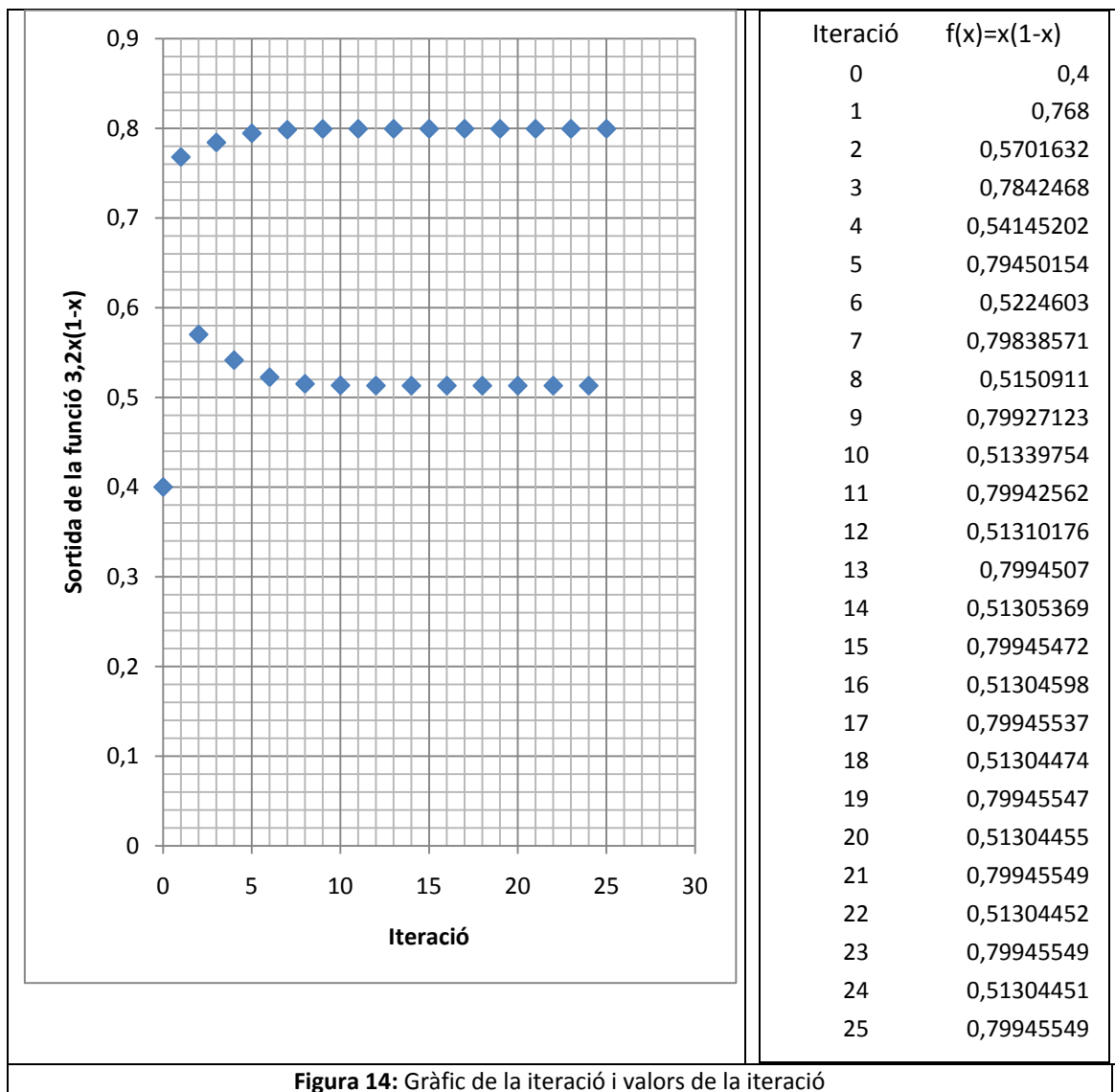
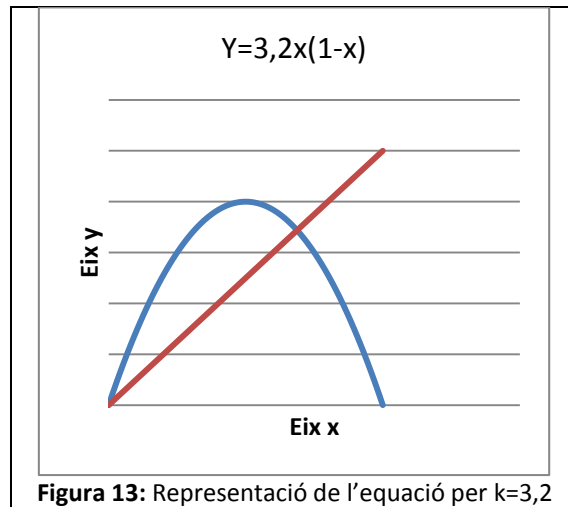


Es veu que en augmentar k l'atractor augmenta de valor.

A partir d'ara per simplificar els càlculs prendrem $z = 1$.

Ara continuarem augmentant el valor de k per comprovar si sempre que augmentem el valor de k l'atractor augmentarà de valor, suposem $k=3,2$,

$$x_{n+1} = 3,2x_n(1 - x_n)$$



Un resultat sorprenent! El punt fix el podem calcular amb el plantejament:

$$x = kx(1 - x) = -kx^2 + kx ; \text{ una soluci\u00f3 } x = 0 \text{ i l'altre } 1 = -kx + k; x_{fix} = \frac{k-1}{k}$$

$$k = 3,2; x_{fix} = \frac{2,2}{3,2} = 0,6875$$

L'atractor ja no \u00e9s el segon punt fix que era abans sin\u00f3 que s'ha dividit en dos!!! Els dos atractors tenen valors de 0,51304451... i 0,79945549...

Pel que es veu l'atractor no augmenta sempre de valor si augmentem k .

Aquest fet tamb\u00e9 succeeix amb altres equacions com, per exemple, la funci\u00f3 sinus o exponencial (vegeu l'Annex).

Ara l'atractor no \u00e9s cap dels punts fixos que trob\u00e0vem dient que si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$; i d\u00e8iem que: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ llavors $x = f(x)$ ara en s\u00f3n dos de diferents, ara \u00e9s el moment de veure el perquè d'aix\u00f2 i respondre la pregunta anterior, perquè el zero essent punt fix no era atractor i el $0,3$ s\u00ed que ho era?

Iteraci\u00f3 gr\u00e0fica i estabilitat

Abans de respondre la pregunta veurem un m\u00e8tode per iterar gr\u00e0ficament. En els eixos de coordenades es representa la funci\u00f3 que es vol iterar $f(x)$ i la recta $y=x$. Per iterar, sols cal seguir aquests passos:

- S'agafa el primer valor $x=a$ i es tra\u00e7a una l\u00ednia des de $(a,0)$ fins a $f(a)$ moviment vertical
- Despr\u00e9s es tra\u00e7a una l\u00ednia horitzontal des de $(a,f(a))$ fins a la recta $y=x$ al punt $(f(a),f(a))$
- Es repeteix la operaci\u00f3 n vegades. (des del punt $(f(a),f(a))$ verticalment fins a $(f(a),f(f(a)))$...)

Exemple iterar el cas de la funci\u00f3 que d\u00e8iem al principi la de que la poblaci\u00f3 d'ocells augmentava 1,5 vegades cada any.

$$f(x)=1,5x+0,4$$

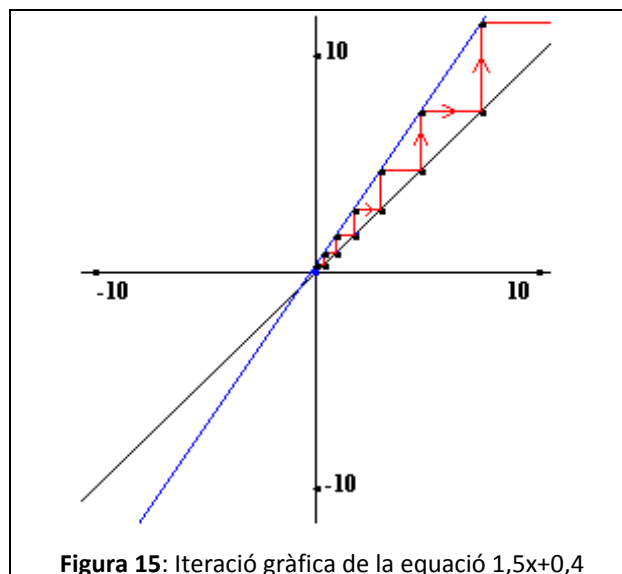
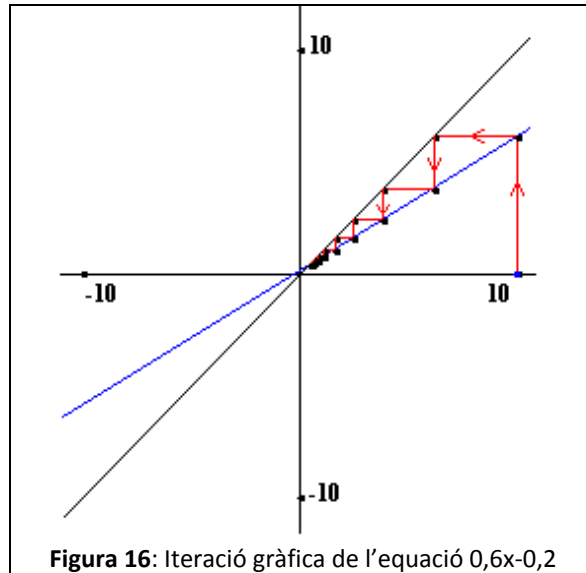


Figura 15: Iteraci\u00f3 gr\u00e0fica de la equaci\u00f3 $1,5x+0,4$

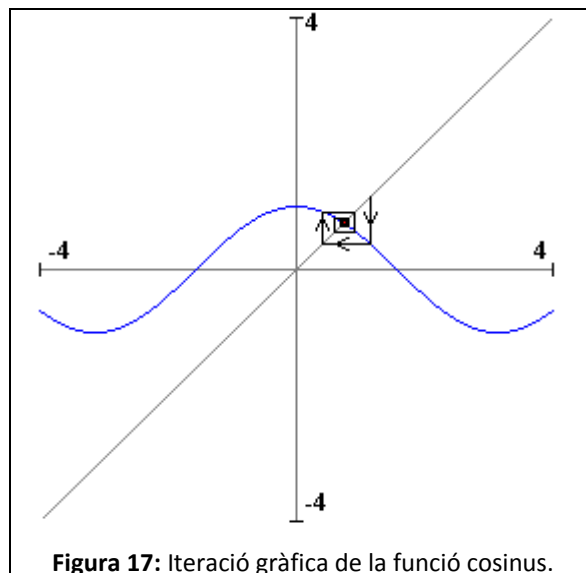
Es pot veure com la població tendiria a l'infinit i que el punt $P(-0,8,-0,8)$, que és on es tallen les dues rectes, és un **repulsor** o un punt fix inestable.

En canvi si la funció és $f(x)=0,6x-0,2$



Es veu que el punt fix (el punt de tall) és un **atractor** o un punt fix estable.

En la **figura 17** es veu la iteració de la funció cosinus i com tendeix a un punt fix.



Els sistemes que tendeixen a un atractor s'anomenen **sistemes estables**, els sistemes que al contrari no tendeixen a un punt fix sinó al contrari, en defugen s'anomenen **inestables**.

Intuïtivament es podria veure que té alguna relació amb els pendents, anem a veure-ho.

Suposem una funció iterada $x_{n+1} = f(x_n)$ que té un punt fix a llavors $a = f(a)$. Per iteració, l'error que fem en intentar trobar aquest punt és igual al valor absolut de la diferència entre el valor iterat menys a .

$$|x_{n+1} - a|$$

Per saber si a és un atractor, el que es pot fer és dividir l'error en la iteració $n + 1$ entre l'error en la iteració n , si el resultat és més gran que 1 vol dir que l'error està creixent i que per tant el punt serà un repulsor i no el podem trobar per iteració, en canvi si el resultat és més petit que 1 vol dir que ens estem aproximant a i que per tant a és un atractor:

$$\left| \frac{x_{n+1} - a}{x_n - a} \right| < 1$$

I com que hem partit de la funció $x_{n+1} = f(x_n)$ i de $a = f(a)$ i ho podríem substituir en la inequació anterior i obtindríem:

$$\left| \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right| < 1$$

Aquesta expressió recorda lleugerament a l'equació del pendent d'una funció.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

Per tant podríem escriure:

$$\lim_{(x_n - a) \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right| = |f'(a)|$$

Per tant trobem que si el valor absolut de la derivada en el punt solució és més petit que 1, el punt solució serà un atractor, ja que l'error anirà disminuint, si bé pel contrari si la derivada en el punt solució és més gran que 1 el punt serà un repulsor. I si el valor absolut de la derivada és igual a 1, no serà un atractor, ja que l'error no disminuirà, però tampoc augmentarà i no serà un repulsor, diem llavors que és un punt fix neutre com és el cas de $y = -x + c$ o $y = \frac{1}{x}$ que en els seus punts fixos tenen el valor absolut del pendent igual a 1, el punt fix és neutre.

Perquè a sigui un atractor ha de complir que:

$$\boxed{|f'(a)| < 1}$$

Arribats a aquesta conclusió, podem respondre a la primera pregunta que ens vam formular. Per què el zero no és un atractor i el $0,3\hat{3}$ sí? (hem canviat de $z = 100$ a $z = 1$ i per tant l'atractor s'ha dividit per 100)

La funció era: $x_{n+1} = 1,5x_n(1 - x_n) = 1,5x_n - 1,5x_n^2$

I si la derivem obtenim: $f'(x) = -3x + 1,5$

Aquí ja podem veure que en el punt 0 té el valor absolut del pendent més gran que 1 i per tant el zero és un repulsor i que per $x = 0,3\hat{3}$ ens dona pendent un valor absolut del pendent

inferior a 1 per tant és un atractor. Mentre que per exemple per $k=0,8$ es pot veure que el zero és un atractor i el punt fix $x = \frac{k-1}{k}$ és un repulsor.

I que passava quan teníem $k=3,2$?

$$x_{n+1} = 3,2x_n - 3,2x_n^2;$$

$$\text{i la derivada és igual a: } f'(x) = -6,4x + 3,2$$

si substituïm la x pels dos punts fixes trobem:

$$f'(0) = -6,4(0) + 3,2 = 3,2 \text{ per tant el zero és un repulsor}$$

$$f'(0,6875) = -6,4(0,6875) + 3,2 = -1,2 \text{ per tant el } 0,6875 \text{ també és un repulsor!!}$$

Els dos punts fixos **han deixat de ser atractors**. I llavors d'on surten els altres dos atractors?? En aquest cas no és ben bé un punt fix sinó que si ens hi fixem veiem que va saltant correlativament de un a l'altre i com és la tercera iteració atreta pel mateix atractor que la primera, per tant podem afirmar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Sabem que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ tendeix a un parell de nombres que de moment no coneixem si anomenem a algun d'aquests dos atractors x , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ llavors i l'iterem dos vegades obtindrem **exactament** el mateix nombre per tant; $x_{n+2} = x_n$

$$x = kx(1 - x)$$

Substituir x per $f(x)$ s'aconsegueix l'expressió següent, que és la segona iteració.

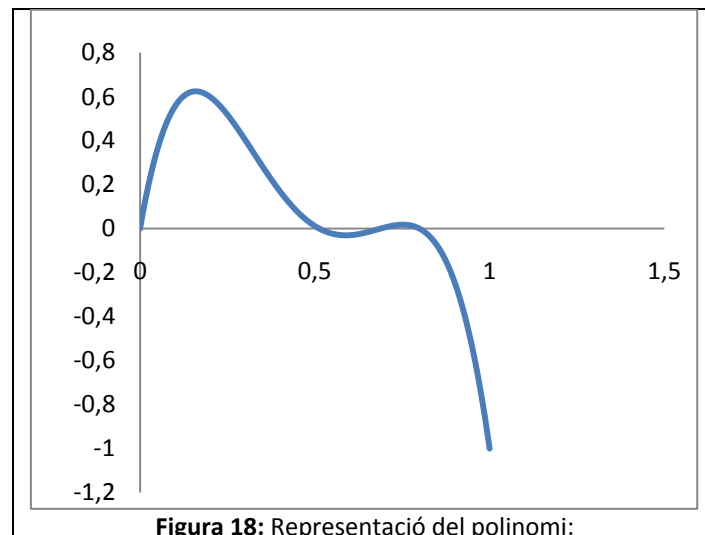
$$x = k(kx(1 - x))(1 - (kx(1 - x)))$$

Trobat les arrels del polinomi que obtenim en passar la x a l'altre banda, trobarem els punts fixos, dos dels quals ja els coneixíem i els dos de nous.

$$x = (k^2x - k^2x^2)(1 - kx + kx^2)$$

$$0 = (k^2 - 1)x - k^3x^2 + k^3x^3 - k^2x^2 + k^3x^3 - k^3x^4$$

$$0 = -k^3x^4 + 2k^3x^3 - (k^3 + k^2)x^2 + (k^2 - 1)x$$



$$0 = -k^3x^4 + 2k^3x^3 - (k^3 + k^2)x^2 + (k^2 - 1)x$$

Per k=3,2

$x = 0$ el zero és una arrel del polinomi. Ja tenim la primera solució

$$0 = -k^3x^3 + 2k^3x^2 - (k^3 + k^2)x + (k^2 - 1)$$

El punt fix també hauria de complir la equació donada, ja que si el punt fix compleix:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

També complirà que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Ara dividirem l'expressió per $x - \frac{k-1}{k}$, el punt fix, ho farem per Ruffini.

Ja tenim una altre solució $x = \frac{k-1}{k}$

	$-k^3$	$2k^3$	$-(k^3 + k^2)$	$(k^2 - 1)$
$\frac{k-1}{k}$		$-k^3 + k^2$	$k^3 - k$	$-k^2 + 1$
	$-k^3$	$k^3 + k^2$	$-k^2 - k$	(0)

$$0 = -k^3x^2 + (k^3 + k^2)x - (k^2 + k)$$

Resolem l'equació de segon grau per obtenir les altres dues arrels del polinomi:

$$x = \frac{-k^3 - k^2 \pm \sqrt{(k^3 + k^2)^2 - 4k^3(k^2 + k)}}{-2k^3}$$

$$x = \frac{-k^3 - k^2 \pm k^2\sqrt{k^2 - 2k - 3}}{-2k^3}$$

$$x = \frac{-k - 1 \pm \sqrt{k^2 - 2k - 3}}{-2k}$$

$$x_1 = \frac{-k - 1 + \sqrt{k^2 - 2k - 3}}{-2k}$$

$$x_2 = \frac{k + 1 + \sqrt{k^2 - 2k - 3}}{2k}$$

Aquests són els **dos** nous atractors apareguts arran de la duplicació de l'anterior.

Per k=3,2 obtenim valors de:

$$x_1 = \frac{-k - 1 + \sqrt{k^2 - 2k - 3}}{-2k} = \frac{-3,2 - 1 + \sqrt{(3,2)^2 - 2(3,2) - 3}}{-2(3,2)} = 0,5130445095$$

$$x_2 = \frac{k + 1 + \sqrt{k^2 - 2k - 3}}{2k} = \frac{3,2 + 1 + \sqrt{(3,2)^2 - 2(3,2) - 3}}{2(3,2)} = 0,7994554905$$

El mateix resultat que havíem trobat experimentalment!

Es pot veure en les equacions dels atractors que l'atractor es duplicarà a partir de certs punts que vindran donats per l'equació de segon grau que hi ha dintre l'arrel, pel fet de que a l'interior de l'arrel no pot ser negativa, per tant el valor mínim de l'equació de dintre l'arrel és zero.

$$0 = k^2 - 2k - 3$$

$$k = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$k_1 = 3 \quad k_2 = -1$$

Un resultat sorprenent, la funció logística té només sentit per nombres positius en el context de poblacions, però la funció logística també presenta una duplicació de l'atractor en disminuir la k .

Per tant obtenim que la duplicació de l'atractor sorgeix a partir de $k=3$ i de $k=-1$ de les equacions dels punts fixos deduïm que quan sigui més gran de tres existirà i quan sigui més petit que -1 també.

A aquest resultat també s'hi pot arribar per la definició que havíem donat d'atractor. Com perquè hi hagi duplicació de l'atractor els dos punts fixos no han de ser atractors:

Perquè a sigui un atractor ha de complir que $|f'(a)| < 1$ i per tant perquè no sigui un atractor $|f'(a)| \geq 1$

$$f(x) = -kx^2 + kx$$

$$f'(x) = -2kx + k$$

Llavors en el punt fix 0 es compleix que el pendent és igual a k

$$f'(0) = k$$

Perquè sigui repulsor el valor absolut de k ha de ser més gran o igual que 1.

$$|k| \geq 1$$

Per tant el punt 0 no serà un atractor si k pertany a l'interval $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

D'igual manera pel punt fix $\frac{k-1}{k}$:

$$f'\left(\frac{k-1}{k}\right) = -2k\left(\frac{k-1}{k}\right) + k = -k + 2$$

I perquè no sigui un atractor:

$$|-k + 2| \geq 1$$

Hem de considerar tant si $-k + 2$ és negatiu com positiu

$$-k + 2 \geq 1$$

$$-k \geq -1$$

$$k \leq 1$$

$$-1(-k + 2) \geq 1$$

$$k - 2 \geq 1$$

$$k \geq 3$$

llavors el conjunt de valors de k en què el punt fix $\frac{k-1}{k}$ no és un atractor és $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

Si mirem la part comuna en que els dos punts fixos tenen el valor absolut del pendent més gran o igual que 1 et dóna $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

El mateix resultat que el que ens havia donat solucionant l'equació de segon grau que hi havia dintre l'arrel. Aquest resultat també indica que ja no són atractors.

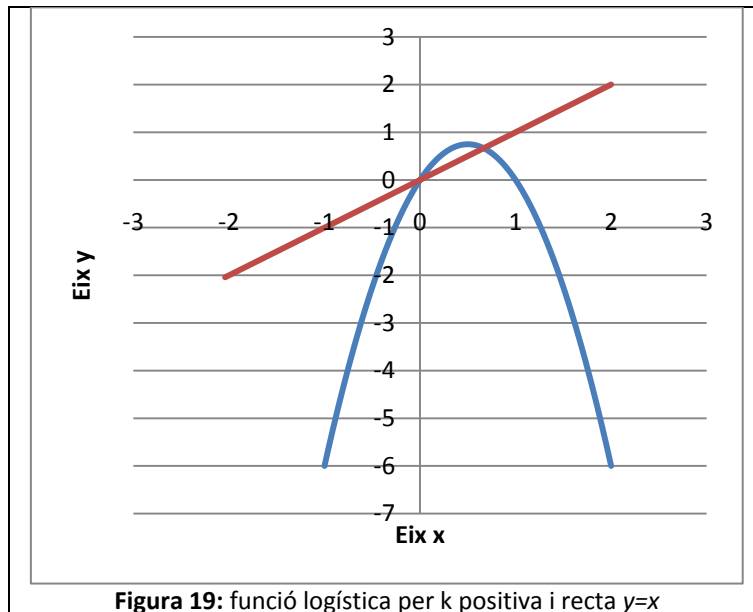
Que se'ns escapa!

Però també s'ha de dir que perquè hi hagi duplicació de l'atractor la funció no es pot "escapar" i tendir a l'infinit. I si provem, per exemple, $k=6$ o una x gran, ens dóna:

Taula 3		Iteració	$f(x)=2,5x(1-x)$
Iteració	$f(x)=6x(1-x)$		
0	0,4	0	2
1	1,44	1	-5
2	-3,8016	2	-75
3	-109,522575	3	-14250
4	-72628,3025	4	-507691875
5	-3,165 ¹⁰	5	-6,4438 ¹⁷
6	-6,0102 ²¹	6	-1,0381 ³⁶
7	-2,1674 ⁴⁴	7	-2,6939 ⁷²
8	-2,8185 ⁸⁹	8	-1,814 ¹⁴⁵
9	-4,766 ¹⁷⁹	9	-8,229 ²⁹⁰

Es veu clarament que la funció tendeix a $-\infty$ i que no hi ha cap atractor, excepte l'infinit. Això ens comporta un altre problema: **l'estabilitat de la funció**, és a dir per quins valors de k i de x la funció no s'escapa.

Per $k > 0$ es pot veure en la iteració gràfica que per tal de que no s'escapi x ha de complir que $x \in [0,1]$ si està fora d'aquest interval de les x en la iteració la funció tendeix a infinit. Però ara cal també determinar l'interval de k .

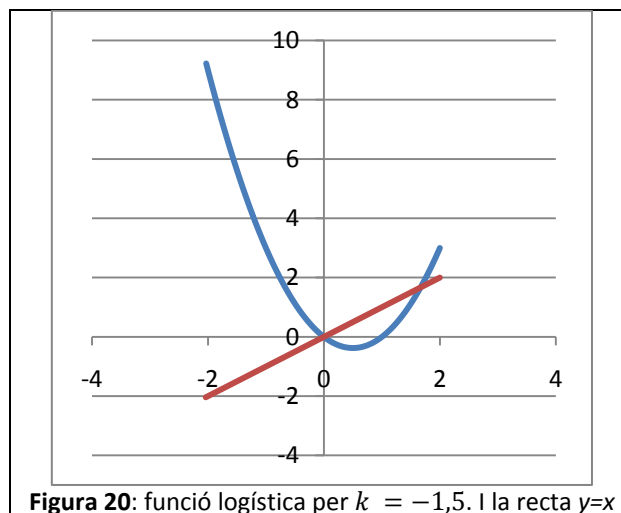


Si iteréssim gràficament i el màxim de la paràbola superés l'u, llavors ja s'escaparia de l'interval marcat, per tant podem buscar la k màxima, que serà en aquella que tindrà el màxim a 1 de l'eix OY . Com és una paràbola, l'ordenada x del màxim la tindrem justament a la meitat de camí de les dues arrels. Les arrels són 0 i 1, per tant, l'ordenada x serà 0,5. Ara podem escriure:

$$1 \leq k(0,5)(1 - 0,5) ; \frac{1}{0,25} = 4 \leq k$$

Bé!! Hem trobat la k màxima per la qual la funció encara no s'escapa a la iteració.

Ara per $k < 0$



Com es pot veure en el gràfic, la recta $y=x$ talla en dos punts, si observem el de més a la dreta ens adonem que si introduïm un nombre més gran que aquest punt al iterar gràficament la funció tendirà a infinit, per tant la x no pot superar el valor donat per:

$$x = kx(1 - x)$$

És a dir:

$$\frac{k-1}{k}$$

Recordem això només val per $k < 0$!!!!

Llavors pel mateix motiu si iteréssim gràficament per l'esquerra arribaria un moment on el valor "rebotaria" sobrepasant el punt $\frac{k-1}{k}$, es a dir que no podem introduir valors més enllà dels valors donats per l'expressió següent:

Com que és una paràbola, la distància entre $\frac{k-1}{k}$ i 0,5 serà la mateixa que entre 0,5 i el punt desitjat (l'altre que té d'imatge $\frac{k-1}{k}$):

$$0,5 - \left(\frac{k-1}{k} - 0,5\right) = 1 - \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k}$$

Ja tenim l'interval de les x que podem introduir

Per $k < 0$ $x \in \left[\frac{1}{k}, \frac{k-1}{k}\right]$

Ara anem a trobar la k mínima. El mínim de la paràbola no pot superar cert valor, que si el supera a l'iterar gràficament veuríem que se'n va cap a l'esquerra s'eleva al quadrat i "rebota" cap a la recta $y = x$ en un valor superior a $\frac{k-1}{k}$ i llavors s'escaparia.

Per tant el mínim de la funció no pot superar $\frac{1}{k}$:

Per aquest motiu la k mínima ha de complir:

$$\frac{1}{k} = k(0,5)(1 - 0,5)$$

$$1 = 0,25k^2$$

$$k = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Però com havíem posat la condició de que $k < 0$

$$k = -2$$

Ara ja tenim el conjunt de k possible pel qual existeix una regió en els nombres reals en què la funció no tendeix a infinit, que és:

$$k \in [-2, 4]$$

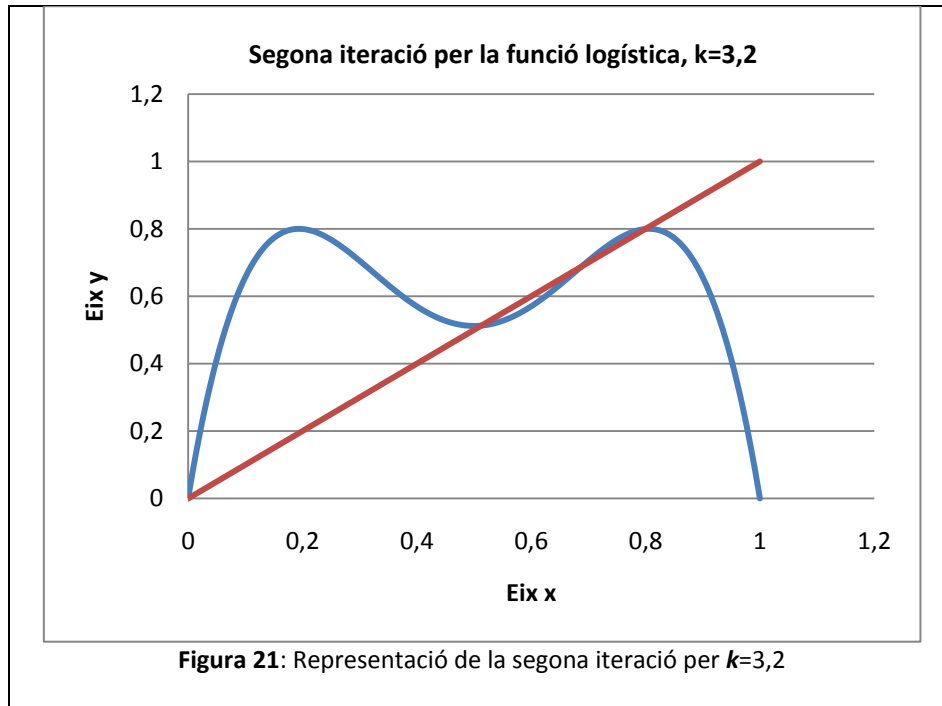
No cal mencionar que si $k = 0$ o $x = 0$ la òrbita ja no es mou.

Reprement la nostra recerca, els dos atractors que havíem trobat a la pàgina 21 es poden fer visibles si es representa la segona iteració de la funció logística és a dir la funció $y = k(kx(1 - x)(1 - (kx(1 - x))))$ que és una funció de 4t grau.

$$y = -k^3x^4 + 2k^3x^3 - (k^3 + k^2)x^2 + k^2x$$

Per $k=3$,obtenim el gràfic següent.

En la figura 21 es veuen perfectament les quatre solucions trobades anteriorment, que són els punts de tall amb la recta $y=x$, a cop d'ull ja es veu que els dos nous punts fixos tenen el valor absolut de la derivada inferior a 1.



Anem a comprovar-ho:

$$y' = -4k^3x^3 + 6k^3x^2 - 2(k^3 + k^2)x + k^2$$

$$y'(0,5130445095) = 0,1599999996$$

$$y'(0,7994554905) = 0,1599999992$$

Aquests dos resultats són sospitosament semblants (és evident que pot ser degut a les aproximacions); substituint els dos nous atractors en la derivada en la segona iteració, algebraicament, utilitzant el programa *Derive 5* trobem que són iguals i els pendents venen donats ambdós casos per:

$$y' \left(\frac{k+1 + \sqrt{k^2 - 2k - 3}}{2k} \right) = \boxed{2(k+2) - k^2}$$

$$y' \left(\frac{-k-1 + \sqrt{k^2 - 2k - 3}}{-2k} \right) = \boxed{2(k+2) - k^2}$$

$k=3,2$

$$2(3,2 + 2) - 3,2^2 = 0,16$$

Ara ens podríem qüestionar si els atractors es poden tornar a duplicar o no. La resposta és sí.

Les derivades són iguals (esclaves l'una de l'altre), això voldrà dir que augmentant k es duplicarà altre vegada ja que el valor absolut del pendent algun moment arribarà a l'u i deixaran de ser atractors. I llavors es duplicarà, i al mateix moment els dos.

Podríem representar la equació de grau 16 en els eixos de coordenades i variant la k podríem arribar a veure que per un cert valor de k hi ha 8 punts fixos, 4 dels quals són els que ja coneixem, i quatre de nous. Al dir que la equació de la quarta iteració és igual a x , en algun cas per certa k trobarem un cicle de període 4.

Primera iteració $y = kx(1 - x)$

Segona iteració $y = k(kx(1 - x))(1 - (kx(1 - x)))$

Tercera iteració

$$y = k \left(k \left(k \left(kx(1 - x) \right) \left(1 - \left(kx(1 - x) \right) \right) \right) \left(1 - \left(k \left(kx(1 - x) \right) \left(1 - \left(kx(1 - x) \right) \right) \right) \right) \right)$$

La quarta iteració és

$$y = k \left(k \left(k \left(k \left(k \left(kx(1 - x) \right) \left(1 - \left(kx(1 - x) \right) \right) \right) \left(1 - \left(k \left(kx(1 - x) \right) \left(1 - \left(kx(1 - x) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) k \left(k \left(kx(1 - x) \right) \left(1 - \left(kx(1 - x) \right) \right) \right) \left(1 - \left(k \left(kx(1 - x) \right) \left(1 - \left(kx(1 - x) \right) \right) \right) \right)$$

Per $k=3,2$ veiem representades en el gràfic la segona i la quarta iteració.

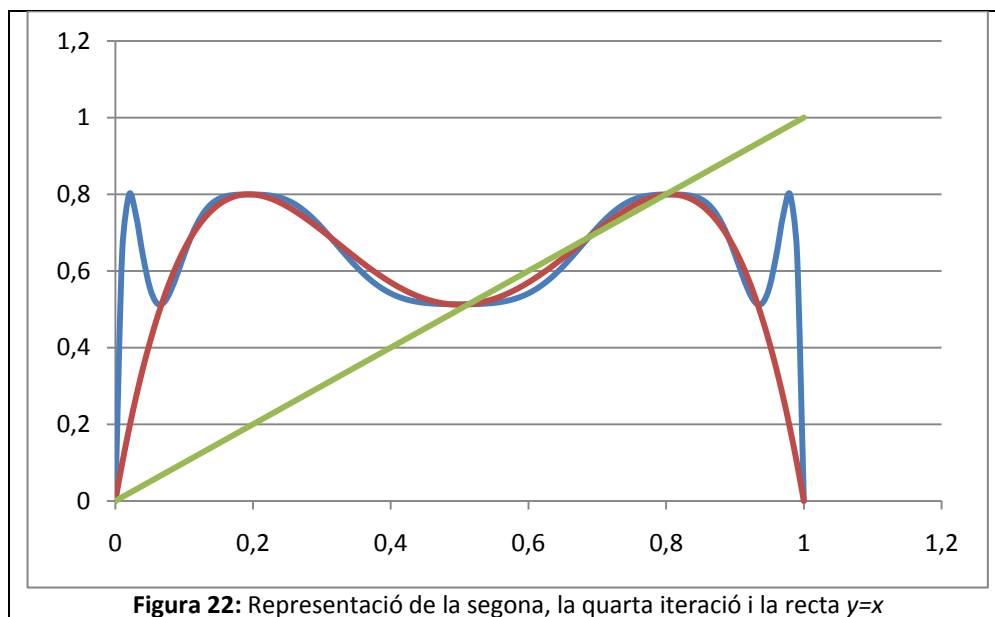
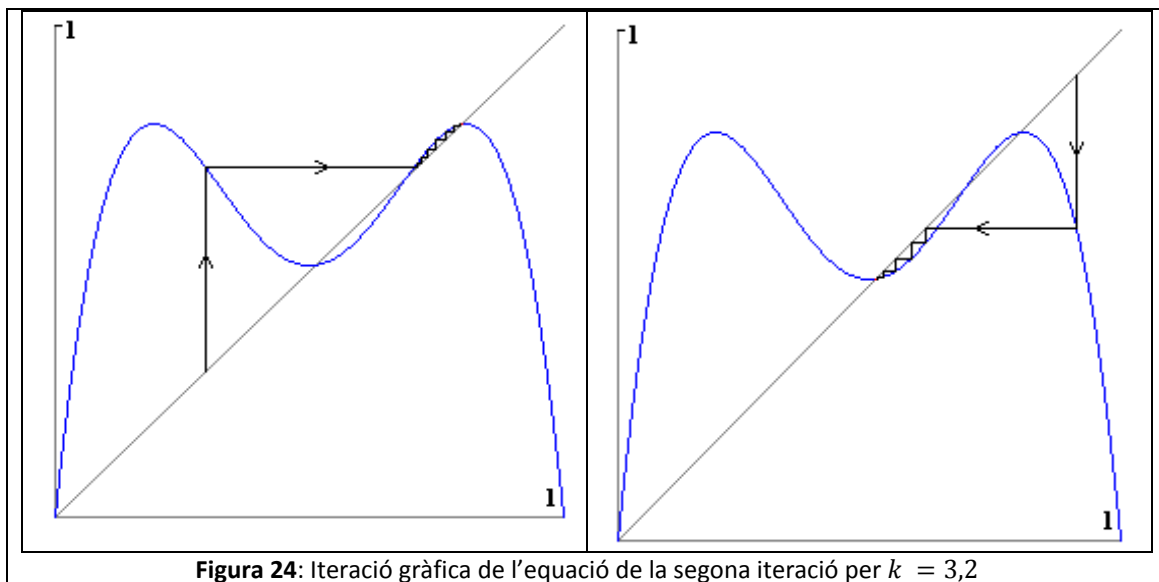
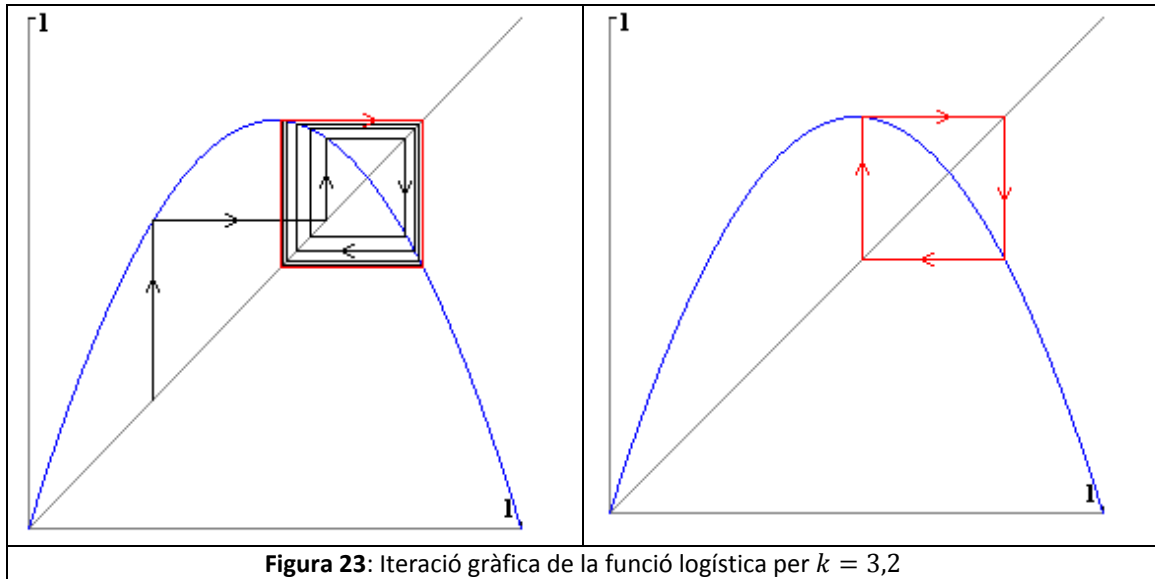


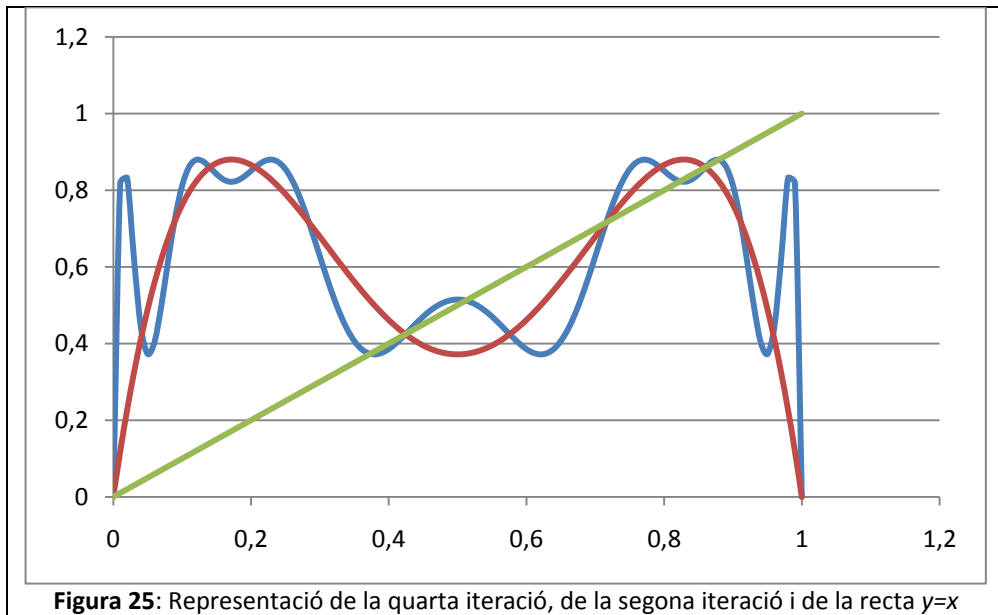
Figura 22: Representació de la segona, la quarta iteració i la recta $y=x$



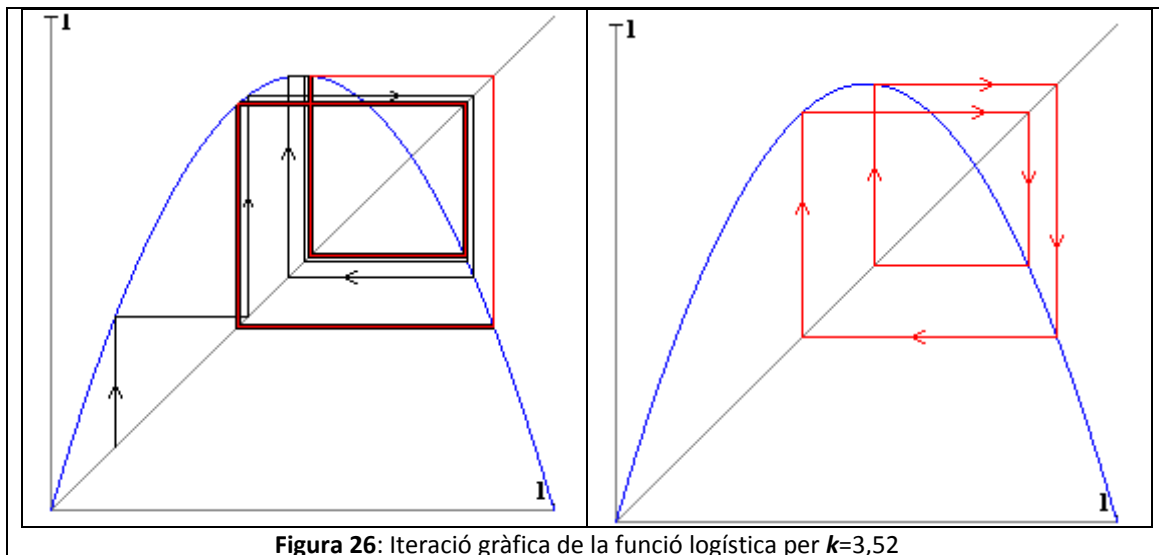
En la *figura 24* en la iteració de la equació de la segona iteració de la funció logística es veu clarament que hi ha dos atractors però no hi ha cicle, es va a parar a l'un o a l'altre, evidentment, ja que el valor pel qual va a parar al primer atractor l'entres altre vegada a la equació de la segona iteració això fa que torni al mateix, però si li apliquéssim la funció logística en la primera iteració aniria a parar justament a l'altre atractor.

Ara veurem que en augmentar el valor de k , per cert valors de k , com augmentem el pendent, la equació de la quarta iteració tallarà en vuit punts, quatre dels quals iguals que en la segona i quatre de nous

La segona i la quarta iteració per $k=3,52$



Iterant gràficament en la primera iteració arribaríem a un cicle:



En el dibuix de l'esquerra hi ha tota la trajectòria i en el de la dreta només el cicle de període 4. L'atractor s'ha tornat a duplicar, com es pot veure en la figura 25, s'intueix que el pendent en els anteriors atractors ara és més gran que 1, són els punts on es tallen la segona i la quarta iteració. I que han aparegut 4 nous punts fixos (en la quarta iteració) que semblen ser atractors, en la figura 26 ho comprovem que efectivament ho són.

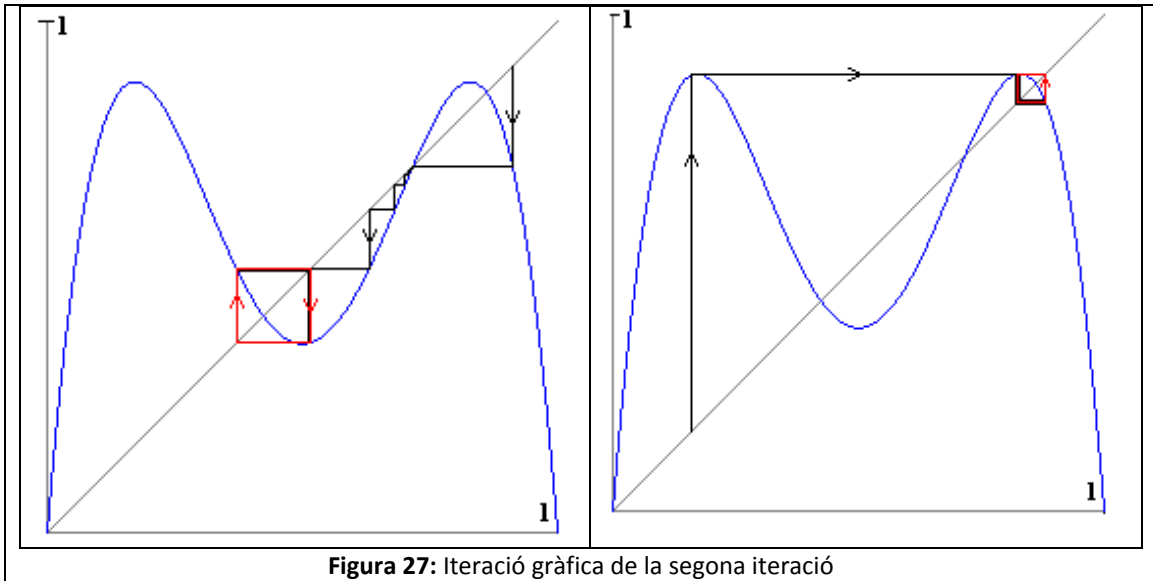


Figura 27: Iteració gràfica de la segona iteració

Es pot veure en la *figura 27* que en el gràfic de la segona iteració segons el valor inicial s'entra a un **cicle de període 2 local** o a l'altre, pel mateix motiu que quan $k = 3,2$ el que passa és que aquell punt ara és un repulsor i genera 2 atractors.

Ara provem $k = 3,79$ intuïnt que ja hi haurà hagut altres duplicacions.

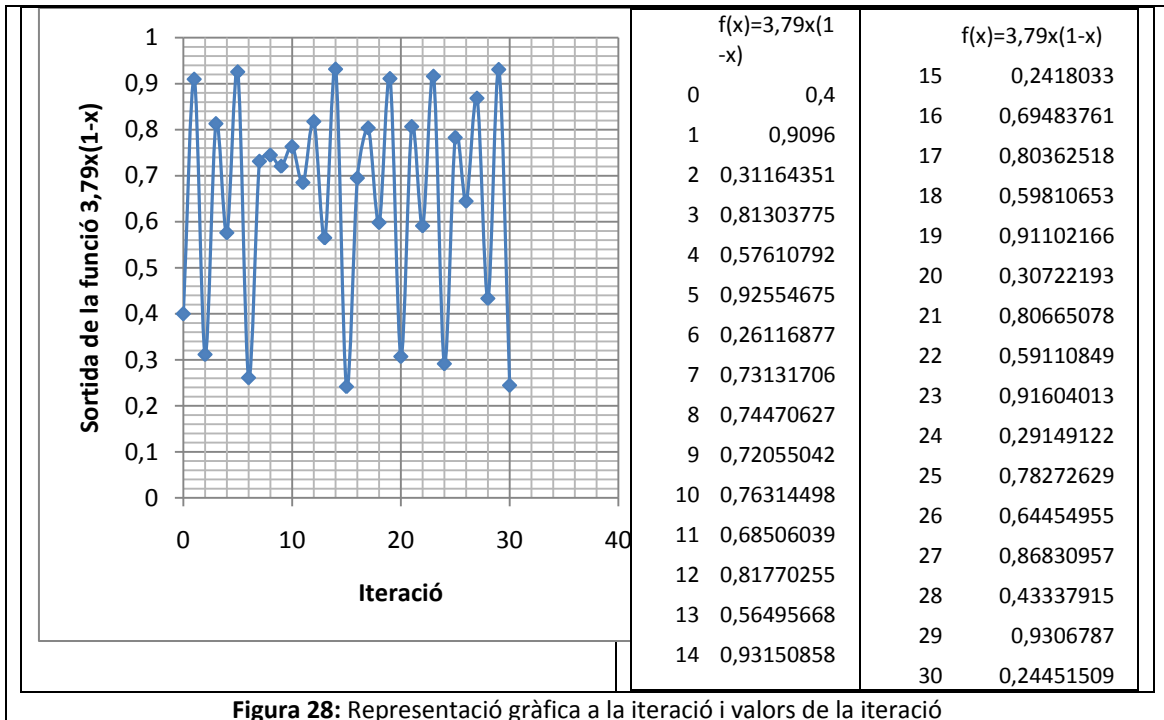


Figura 28: Representació gràfica a la iteració i valors de la iteració

En la *figura 28* no es veu que segueixi cap patró, però per si de cas ho compararem amb un valor de sortida molt semblant per veure si segueix la mateixa "ruta".

Ara provem de començar per 0,41 enlloc de 0,4

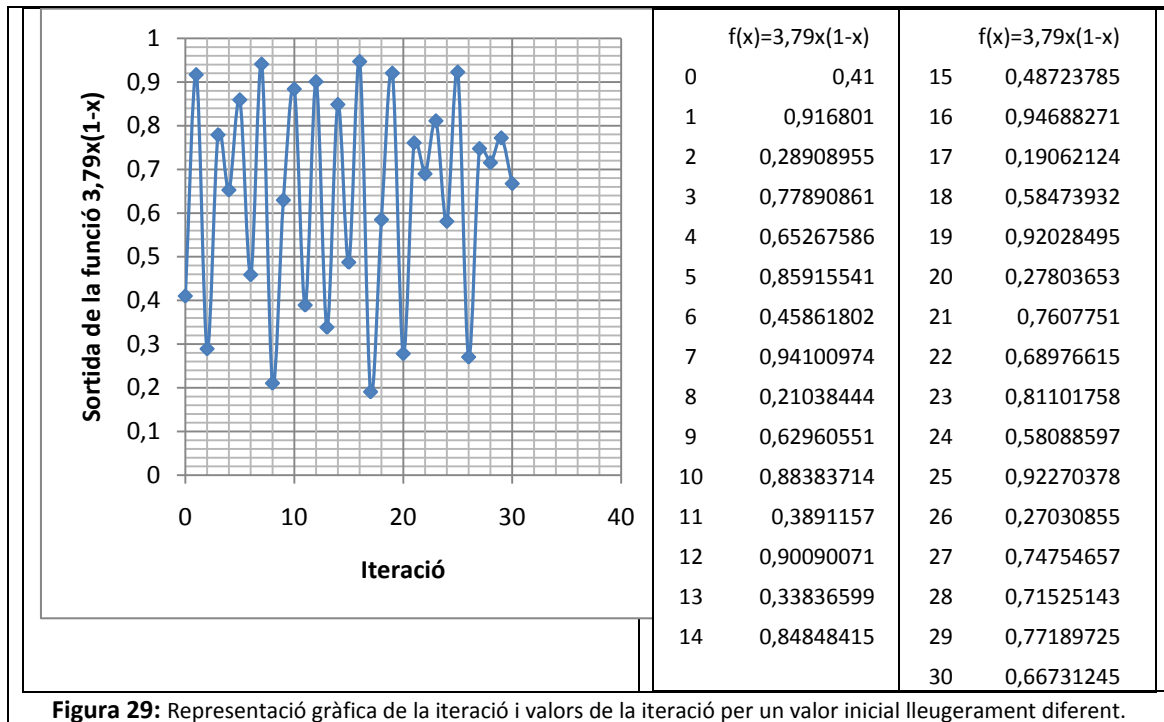


Figura 29: Representació gràfica de la iteració i valors de la iteració per un valor inicial lleugerament diferent.

Només canviant una centèsima les òrbites ja no s'assemblen gens com es veu comparant els valors i els gràfics de les figures 28 i 29, podria ser el caos (no hi ha cicle) o un cicle de període tant llarg que als nostres ulls és el caos, si fos un cicle al variar una miqueta el valor inicial el faríem entrar en una part del cicle molt diferent i per tant les òrbites no s'assemblarien.

3.2. Diagrama de Feigenbaum

Els **diagrames de Feigenbaum** serveixen per visualitzar la variació de l'**atractor** en funció de k .

Per fer un diagrama de Feigenbaum es posa en la variable independent la k i en la variable dependent els atractors que hi han. Explicarem breument i sense entrar en gaire detall com es construeix.

Primer de tot s'ha d'escollir un nombre de iteracions (tot i que teòricament hauria de ser infinit), com més millor, després s'han d'escollir el nombre de valors inicials que s'utilitzaran, és a dir, si provarem 10 valors, si en provarem 100, si en provem 10000.... Com més millor. Els valors que provarem en cas de 100 valors seran 0.01, 0.02, 0.03,..., 0.99 després d'iterar el nombre que haguem escollit de iteracions representem l'últim valor en el gràfic, que teòricament és l'atractor.

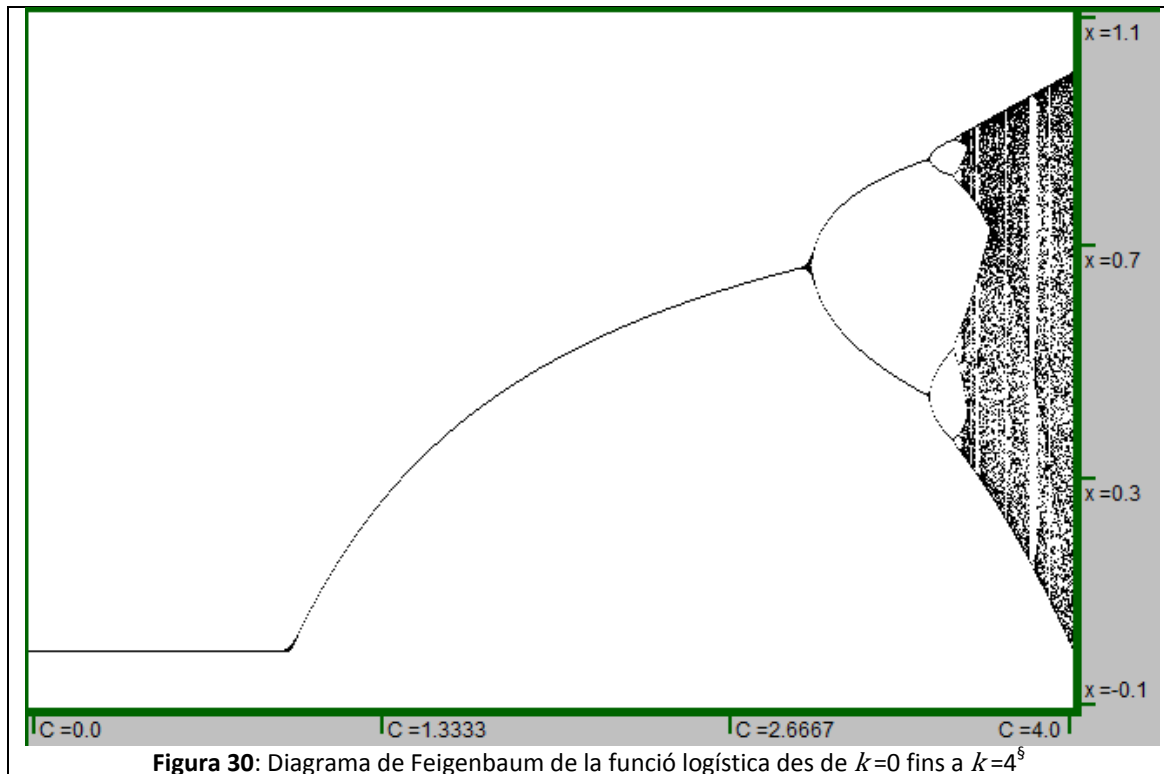


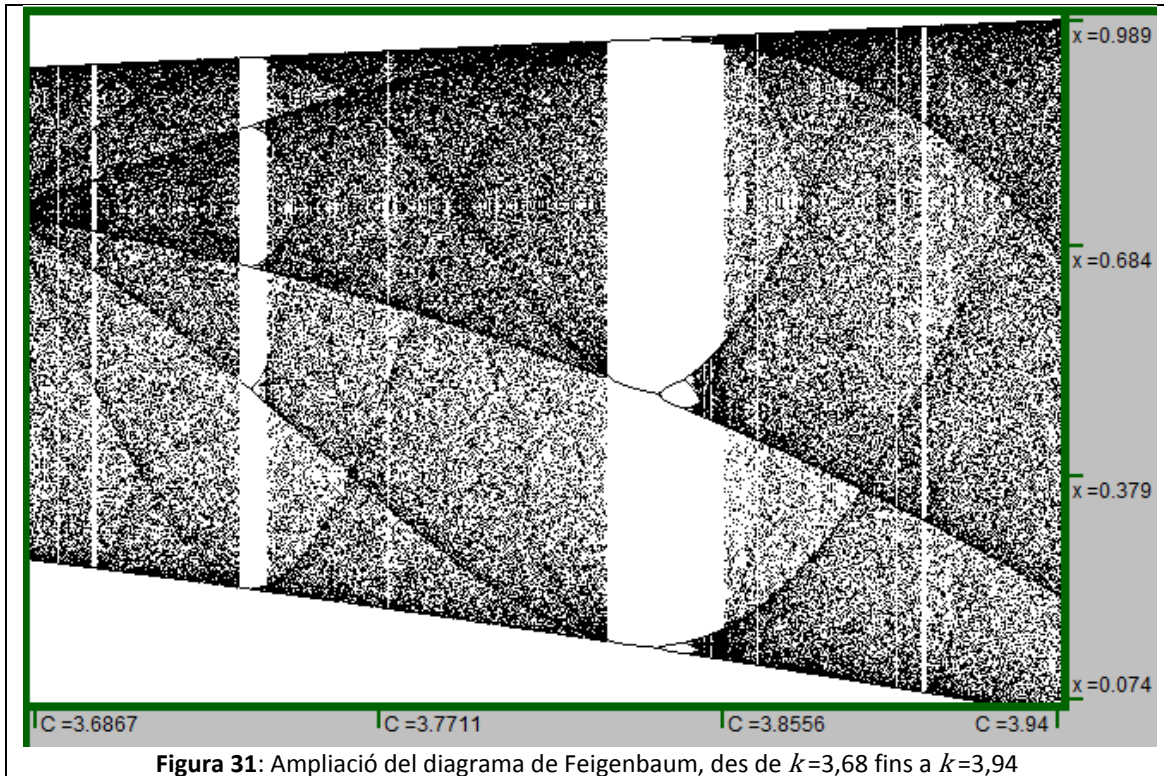
Figura 30: Diagrama de Feigenbaum de la funció logística des de $k=0$ fins a $k=4$ [§]

El que hem estat veient es veu corroborat pel diagrama de la *figura 30*, per una k inferior a 1, el 0 és un atractor, ho podríem comprovar buscant la derivada per una k inferior però molt pròxima a 1. Entre $k = 1$ i $k = 3$ l'atractor va augmentant fins a arribar a $k = 3$ que es divideix en dos, més endavant es torna ambdós a dividir i aquets altre vegada.

Fixem-nos que hi ha una franja clarejada en el diagrama.

Ho ampliarem:

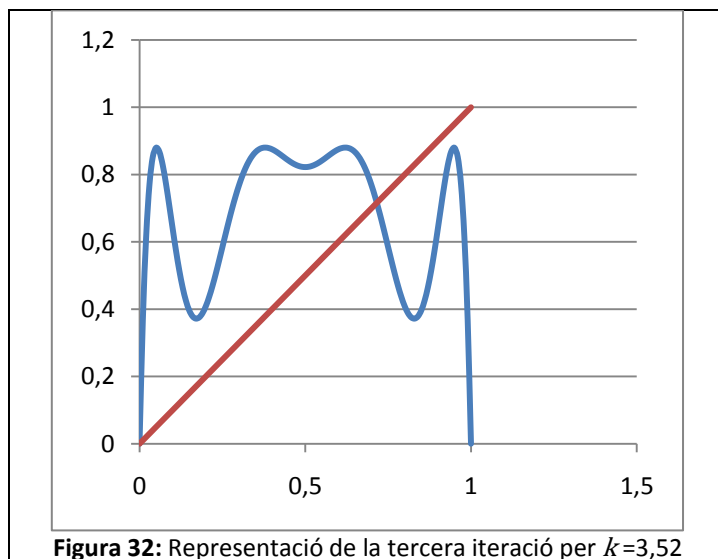
[§] Nota: En els diagrames a sota surt C en lloc de k , ja que dels aplets de la web de la qual els he tret utilitzen C en lloc de k .



Si ens hi fixem la regió més clara del diagrama de la figura 31 es veu perfectament que hi ha 3 atractors però sorprenentment quan hi ha 3 atractors és després de que n'hagin hagut moltíssims!! Els cicles de període semblant no han d'estar precisament de costat, es a dir que el període 5 per exemple pot estar bastant lluny del cicle de període 4.

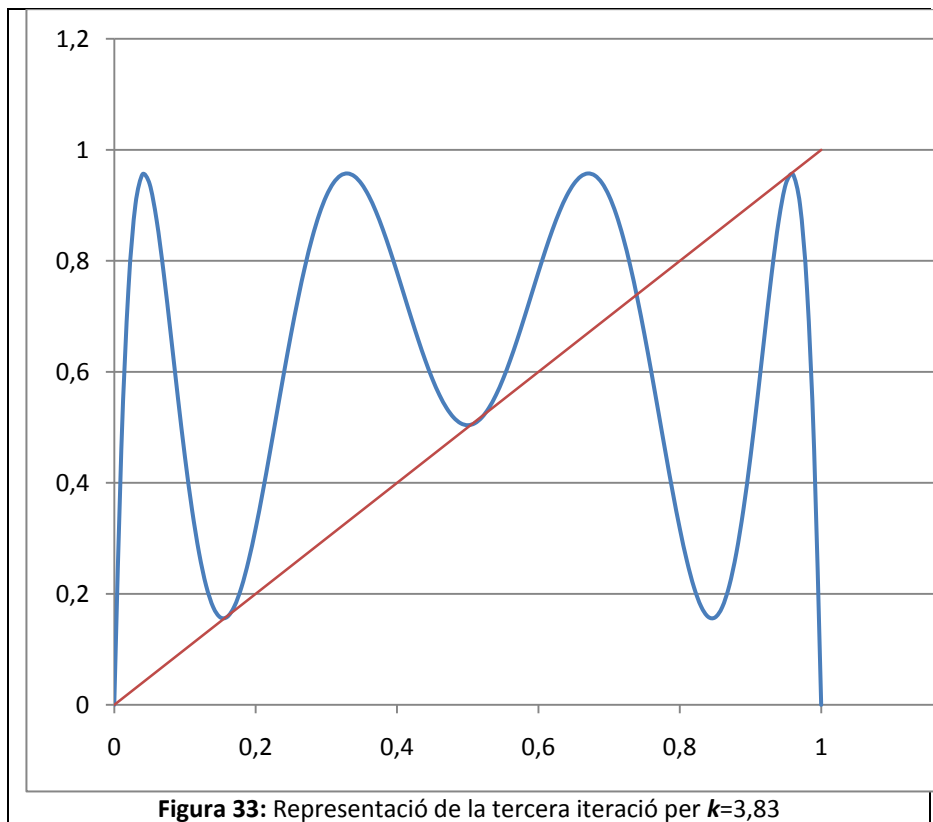
També es pot veure en la franja més clara que hi ha anteriorment que correspon a una zona on hi ha 5 atractors.

Si representem la equació de la tercera iteració veiem que per certs valors de k té 3 atractors $k = 3,52$



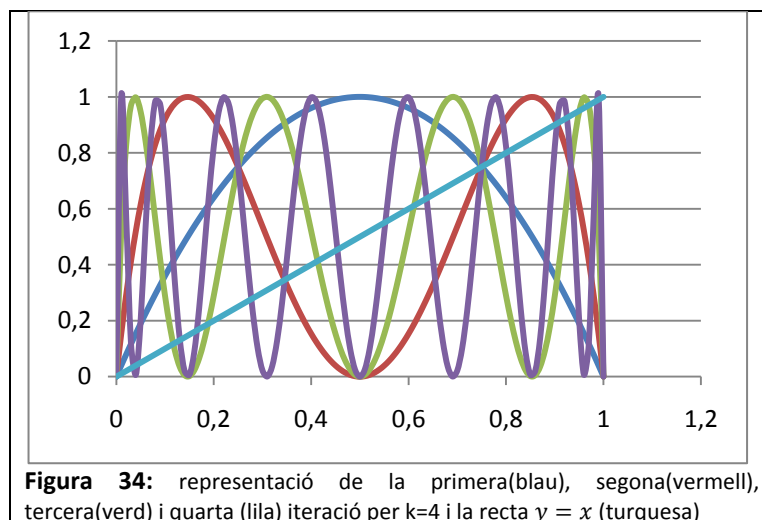
Aquí encara no tenim les arrels que tenen el valor absolut del pendent més petit que 1

Augmentem k per augmentar el pendent i que algunes de les "gepes" travessin la recta $y=x$ provem $k = 3,83$



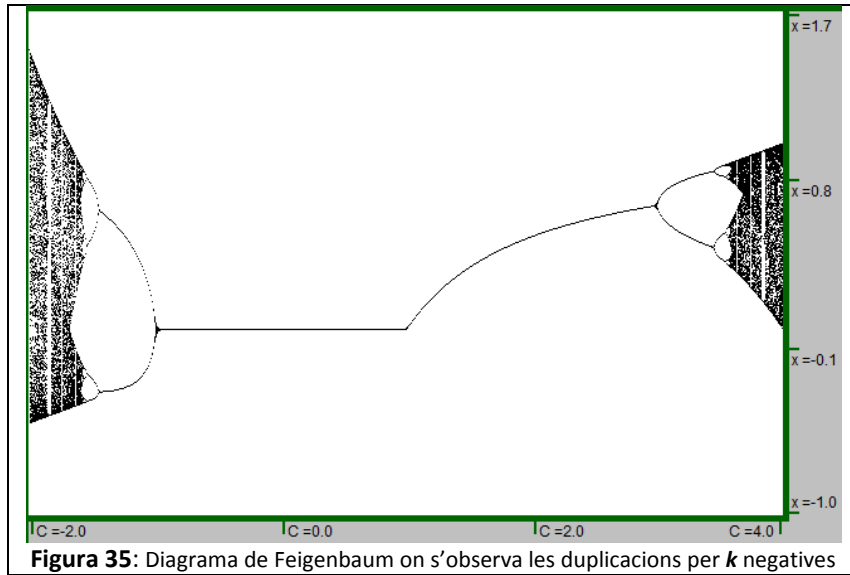
Aquí sí!! Hi ha 8 solucions tot i que costa de veure en la *figura 33* i s'intueix que tres d'elles si que tenen el valor absolut del pendent és més petit que 1. Així podem entendre la franja clarejada del diagrama de Feigenbaum. Això també val per totes les altres zones clarejades del diagrama.

Què passa en les regions on tenim pràcticament infinits o infinits atractors? Doncs que el sistema agafa molta sensibilitat a les condicions inicials. Es veu molt bé que hi ha infinits atractors en el cas de $k = 4$.

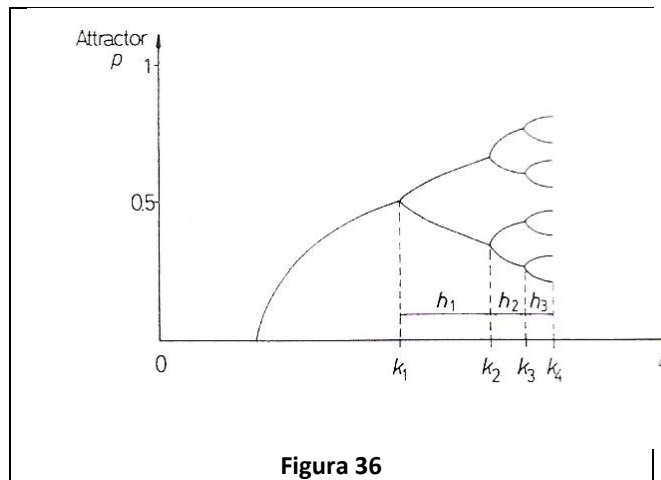


Si anem representat les equacions successives de la primera, segona, tercera, quarta... iteracions, es veu que el pendent en els punts fixos sempre té un valor absolut més gran que 1 i que cada vegada els puns que tallen a la recta tenen el valor absolut del pendent més i més gran.

Vam veure que també hi havia duplicació de l'atractor per k més petites que -1 . I consegüentment també hi ha un diagrama semblant per k negativa.



Al 1976 *Mitchell Feigenbaum* va investigar aquests diagrames, va treballar en la distància que hi havia entre una bifurcació i la següent i entre aquesta ultima i la següent.



$$h_n = k_{n+1} - k_n$$

On k_n és el valor de k pel qual es produeix la n duplicació de l'atractor.

Va trobar que el quocient entre una h i la seva contigua tendia a un cert valor, **la constant de Feigenbaum**.

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{n-1}}{h_n} = 4,669201609 \dots$$

Amb aquesta constant podem fer una estimació de quan es produirà la següent duplicació.

Per conèixer amb exactitud la k per la qual es produeix la segona duplicació s'ha de plantejar:

El valor absolut de la derivada en la segona iteració en els dos nous atractors trobats, ha de ser més gran o igual que 1, perquè hi hagi duplicació dels dos nous atractors, així podrem trobar el punt a partir del qual es torna a duplicar

$$|-4k^3x^3 + 6k^3x^2 - 2(k^3 + k^2)x + k^2| \geq 1$$

Per resoldre aquesta inequació utilitzaré el programa *Derive 5* a causa de la llargària dels càlculs.

Substituint la x per

$$x_1 = \frac{-k - 1 + \sqrt{k^2 - 2k - 3}}{-2k}$$

Obtenim:

$$-1 \leq k \leq 3 \text{ i } \sqrt{6} + 1 \geq k \leq 1 - \sqrt{6}$$

I substituint la x per

$$x_2 = \frac{k + 1 + \sqrt{k^2 - 2k - 3}}{2k}$$

Obtenim:

$$-1 \leq k \leq 3 \text{ i } \sqrt{6} + 1 \geq k \leq 1 - \sqrt{6}$$

I si sumem aquests conjunts amb els conjunts anteriors de la primera duplicació de l'atractor, ja que el que volem és que després de la duplicació els punts fixos tinguin el valor absolut de la derivada més gran que 1 per obtenir la següent duplicació de l'atractor, obtenim el conjunt següent:

$$\left(-2, (1 - \sqrt{6}) \right) \cup \left((\sqrt{6} + 1), 4 \right)$$

Cal observar que es dupliquen al mateix temps els dos atractors, això és degut a que ambdós tenen el mateix pendent.

I encara es pot fer una observació més, l'atractor es duplica per primer cop quan $k = 1 + 2$ i quan $k = 1 - 2$ i el segon cop quan $k = 1 + \sqrt{6}$ i $k = 1 - \sqrt{6}$. I per tant tots dos seguiran la mateixa "lleï" perquè han de complir la constant de Feigenbaum de la duplicació de l'atractor (δ).

Ara ja coneixem una h i podríem estimar quan succeiria la següent duplicació:

$$h_n = k_{n+1} - k_n$$

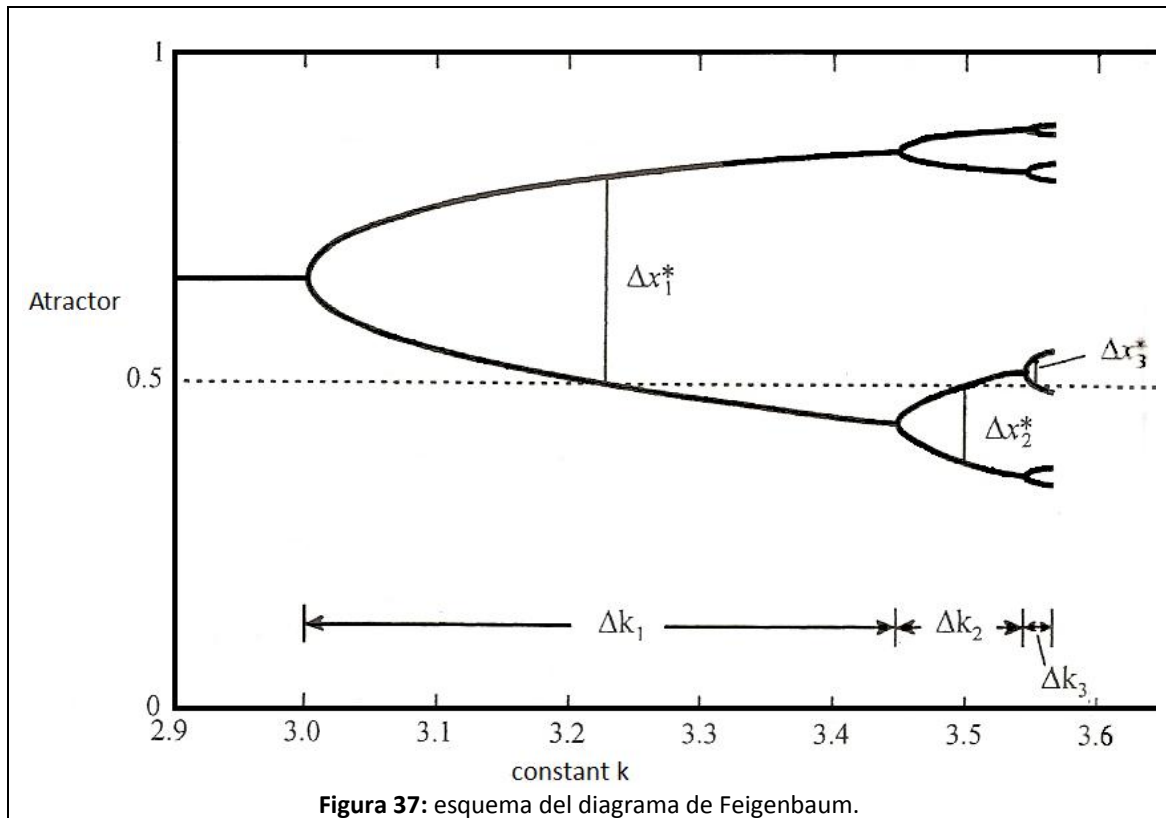
$$\frac{h_{n-1}}{h_n} \approx 4,669201609 \dots$$

$$\frac{\sqrt{6} + 1 - 3}{h_2} \approx 4,669201609$$

$$h_2 \approx \frac{\sqrt{6} - 2}{4,669201609} \approx 0,096266936$$

$$k_3 \approx 0,096266936 + \sqrt{6} - 2 \approx 3,545756681$$

Feigenbaum també va trobar una altre constant, que es relaciona amb la **distància dels dos atractors duplicats**.



Però aquí hi ha un problema, que la diferència entre els dos atractors varia segons on la miris, i si ens fixem amb un diagrama de Feigenbaum veiem que els dos atractors, quan es dupliquen, la diferència entre els nous no és la mateixa. Llavors com pot ser constant??

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta x_{n-1}}{\Delta x_n} = 2,502907875 \dots$$

Feigenbaum va trobar que hi havia un punt crític, aquell en què la derivada era igual per totes les k . En la funció logística és el 0,5 ja que el màxim de la paràbola sempre estarà a $x = 0,5$ perquè és la meitat de les seves dues arrels 0 i 1.

Per trobar la constant de *Feigenbaum* es mira en relació aquest punt.

Tal com mostra la figura 37 es mesura la diferència entre els atractors des d'allà on la recta $y = 0,5$ talla alguna branca del diagrama fins a l'altre atractor.

Existeix el **caos quan hi ha infinits atractors**, tot i que quan hi ha cicles de períodes molt llargs als nostres ulls també és caos (seríem capaços de distingir un cicle de període 16384?? I no és res més que quan l'atractor s'ha duplicat 14 vegades...).

Bifurcacions	Nova periodicitat de l'atractor	Valor de k pel qual existeix la bifurcació (aprox.)	δ que té en aquell moment (aprox.)	α que té en aquell moment (aprox.)
0	$2^0 = 1$			
1	$2^1 = 2$	3,00		2,6547
2	$2^2 = 4$	3,449499	4,7520	2,5319
3	$2^3 = 8$	3,544090	4,6558	2,5085
4	$2^4 = 16$	3,564407	4,6684	2,5049
5	$2^5 = 32$	3,568759		
...				
∞	$2^\infty = \infty$	3,569946	4,6692	2,5029

Hi ha una llei que relaciona la k on es produeix la n duplicació i les iteracions

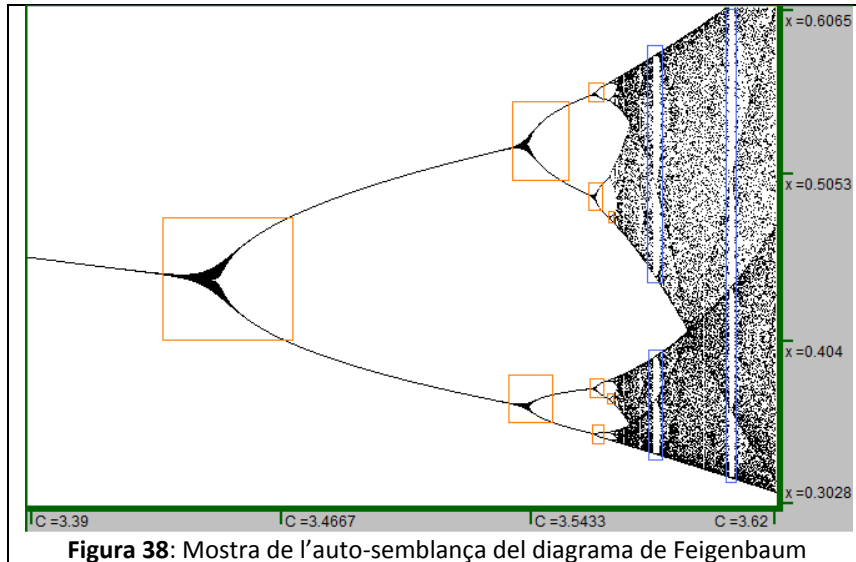
$$k_n = k_\infty - ce^{-cn}$$

On k_n és el valor on es produeix la n duplicació, c una constant que depèn del sistema, i n es el nombre de duplicacions que han ocorregut.

El **caos** apareix per primer cop quan $k = 3,569945672...$ (aquests valors que he extret del llibre *Chaos Theory Tammed* els he provat amb el programa Microsoft Excel i els resultats no em donaven del tot correctament)

Quan k supera aquest valor és molt més raonable donar-li un **enfocament estadístic**.

Aquestes estructures són molt semblants entre si. A més si ampliem el diagrama, com ens mostra la *figura 38*, ens tornem a trobar aquesta mateixa estructura.

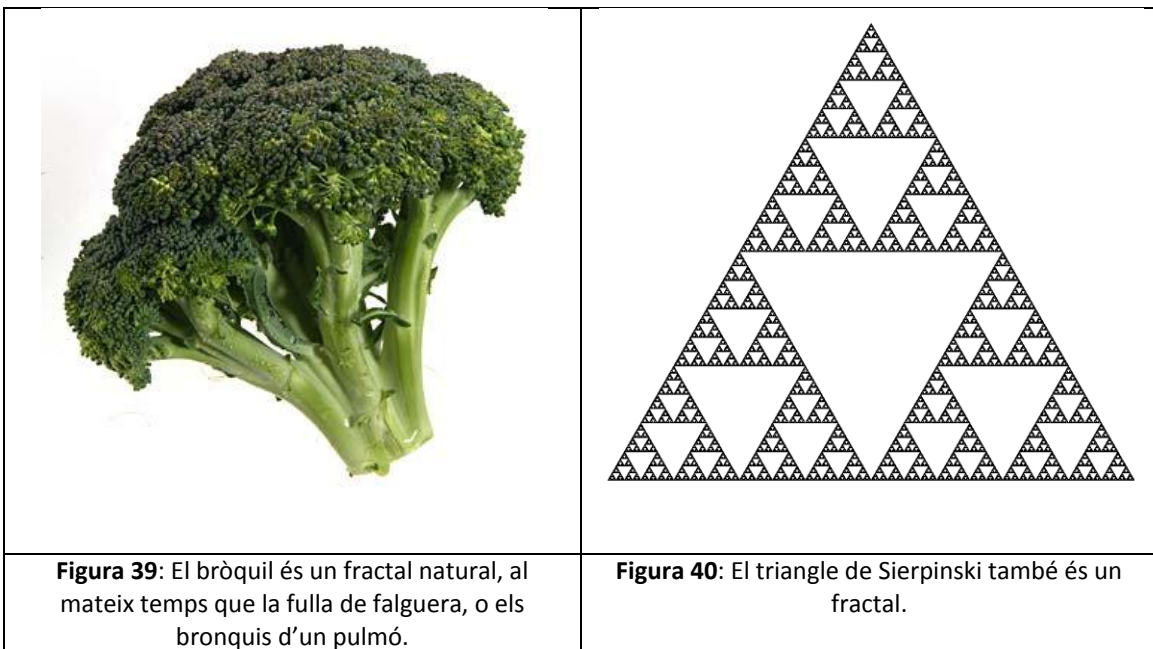


També trobem els mateixos espais. Podem dir que té **auto-semblança**.

Aquí hem d'introduir un altre concepte: **el fractal**

4. Fractals

La geometria **fractal** es va desenvolupar com una manera d'explicar les formes irregulars de la natura, trobar una regularitat dintre la irregularitat.



Benoît Mandelbrot és un matemàtic nascut a l'any 1924 que ha estudiat aquests objectes i és el pare d'aquesta geometria. Ell va catalogar objectes que ja havien estat vistos com el **conjunt de Cantor**, el **floc de neu de Koch** o el **triangle de Sierpinski**.

Un **fractal** és un objecte que mostra **auto-similitud**, en un sentit una mica tècnic, en totes les escales, no és necessari mostrar exactament la mateixa estructura, però ha d'aparèixer en totes les escales el mateix "tipus" d'estructures.

Aquestes estructures són molt complexes d'analitzar utilitzant la geometria convencional.

Tots aquests conjunts tenen unes particularitats comunes:

La **generació iterativa**. Els fractals es generen de manera iterativa, se'ls hi aplica una funció i al resultat se'ls hi torna aplicar la funció i així fins l'infinit. De la mateixa manera que hem vist que es genera el caos, iterant funcions.

L'**auto-semblança a qualsevol escala**, com hem aplicat la mateixa operació al resultat i així successivament, i com que hem iterat infinitament, podem veure una estructura igual a escala molt més petita o més gran (per exemple en el **triangle de Sierpinski**, es genera amb un triangle equilàter, se'l divideix en 4 triangles equilàters i es treu el del mig, es repeteix la operació en els tres triangles equilàters resultants i així fins a l'infinit). L'auto-semblança també es veu perfectament en el diagrama de Feigenbaum que és un fractal.

La **dimensió fraccionària**, sabem que un punt té dimensió 0 una línia dimensió 1 un pla dimensió 2 i un cub dimensió 3, doncs els fractals, generalment tenen dimensions fraccionàries.

Per calcular la **dimensió d'un fractal** es fa seguint la fórmula següent:

$$\text{Dimensió} = \frac{\log(\text{factor d'ampliació de la grandària})}{\log(\text{factor d'ampliació de la longitud})}$$

És una fórmula que induïrem seguidament:

Considerem un quadrat de costat 1, ara generem un altre quadrat a partir de còpies del primer quadrat. El qual té el doble de llargada que el quadrat inicial (el costat és el doble de llarg) i és quatre vegades més gros. Repetim l'operació diverses vegades i obtenim les dades següents

Factor d'ampliació de la longitud	2	3	4
Factor d'ampliació de la grandària	4	9	16

Es pot observar que el factor d'ampliació de la longitud elevat al quadrat et dóna el factor d'ampliació de la grandària.

Ara considerem un cub de costat 1, fem el mateix que anteriorment, generem un altre cub a partir del cub inicial, que té el costat el doble de llarg i té un volum 8 vegades més gran. Repetim la operació diverses vegades, per exemple un cub amb el triple de costat, hi ha 27 cubs dintre, per tant és 27 vegades més gran.

Factor d'ampliació de la longitud	2	3	4
Factor d'ampliació del grandària	8	27	64

Es veu que el factor d'ampliació de la longitud elevat al cub et dóna el factor d'ampliació de la grandària.

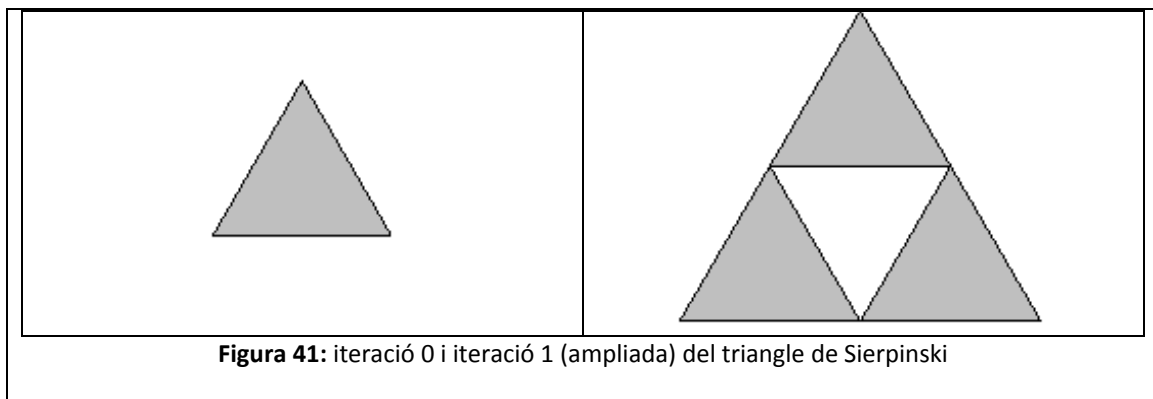
Per tant ara podem escriure:

$$(Factor\ d'ampliació\ de\ la\ longitud)^D = (factor\ d'ampliació\ de\ la\ grandària)$$

Aïllant la dimensió (D) obtenim l'expressió que ja havíem mencionat:

$$Dimensió = \frac{\log(factor\ d'ampliació\ de\ la\ grandària)}{\log(factor\ d'ampliació\ de\ la\ longitud)}$$

Ho aplicarem en el **triangle de Sierpinski**, la idea és que és *més* que una línia però *menys* que un pla:



Com es pot veure en la figura 41 en la iteració 0 i 1 (ampliada) del triangle, el factor d'ampliació de la grandària és 3 (ja que el triangle del mig no conta ja que és el que es treu) i el factor d'ampliació de la longitud és 2

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,5850$$

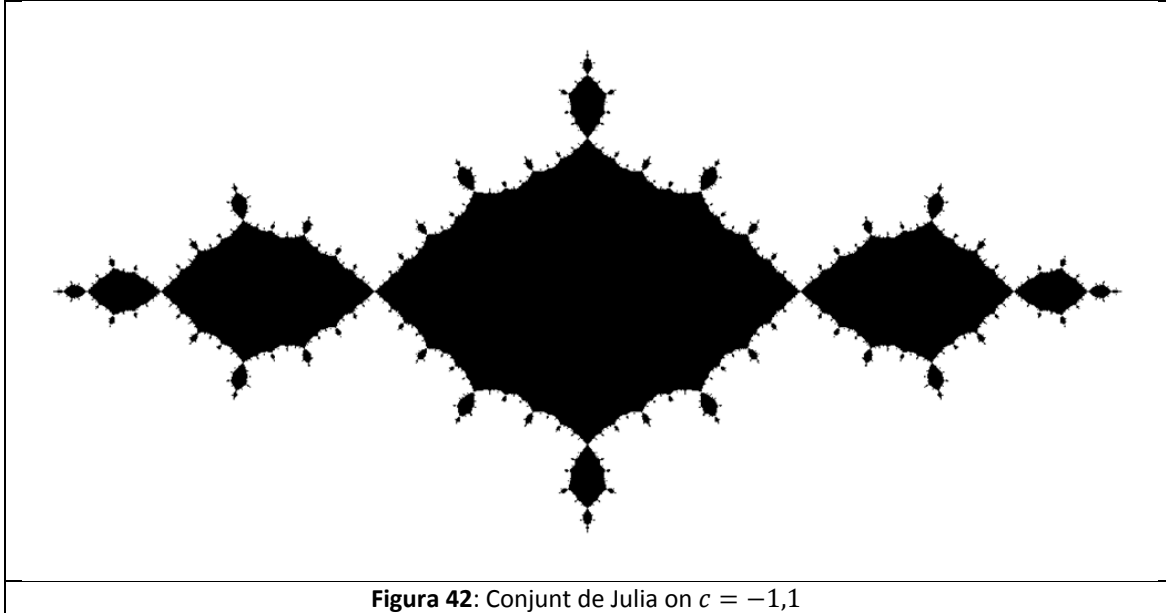
El triangle no és ni té dimensió ni 1 ni 2, està entremig de una línia i un pla.

4.1 Els conjunts de Julia i Mandelbrot

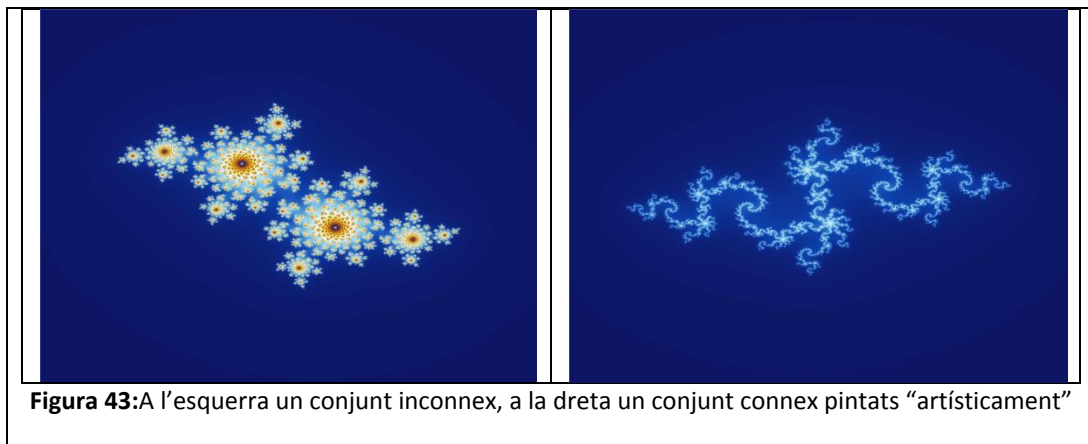
També es poden generar fractals iterant una funció amb nombres complexos.

Els conjunts de Julia

Es generen iterant la funció: $z_{n+1} = z_n^2 + c$ on c és un nombre complex i z un nombre qualsevol. Teòricament s’han d’iterar tots els nombres del pla complex. En el gràfic es representen únicament els punts que estan al límit (entre els punts dels quals el mòdul dels quals tendeix a infinit i els que el seu mòdul no hi tendeix). En la *figura 42* s’han representat (pintat de gris) tots els punts que no tendeixen a infinit per $c = -1,1$.



Els **conjunts de Julia** poden ser **connexos** o **inconnexos**, els connexos són en els que es pot anar des de qualsevol punt a qualsevol altre seguint un camí continu que ha d’estar contingut dintre del conjunt de nombres que en la iteració no tendeixen a l’infinit.



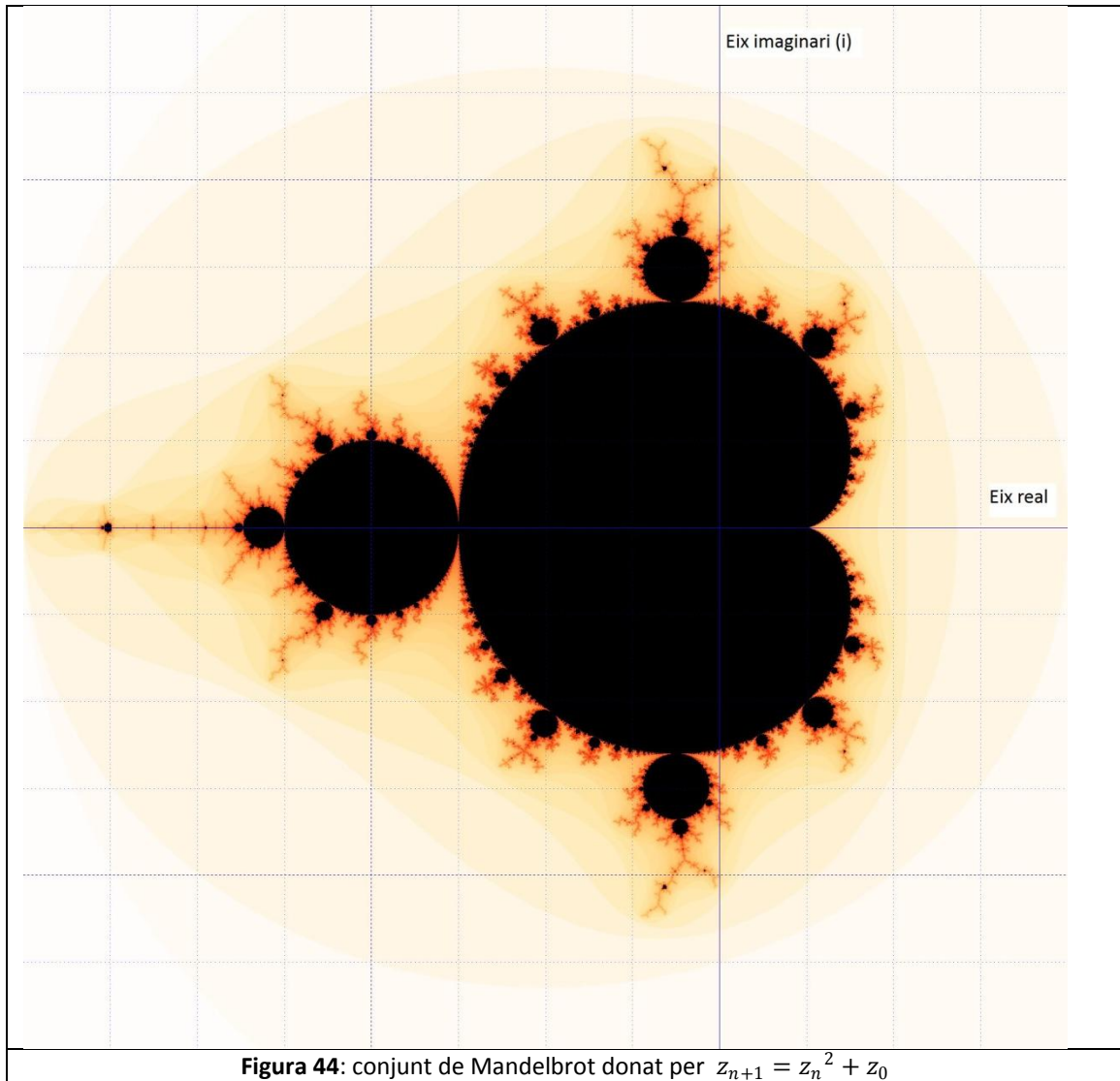
El conjunt de Mandelbrot

El **conjunt de Mandelbrot** està format pels valors de c que generen els **conjunts de Julia connexos**.

Ve determinat per l’equació iterada de:

$$z_{n+1} = z_n^2 + z_0$$

On z_0 és el punt del pla complex inicial de la iteració. Això implica que només hi ha un conjunt de Mandelbrot.



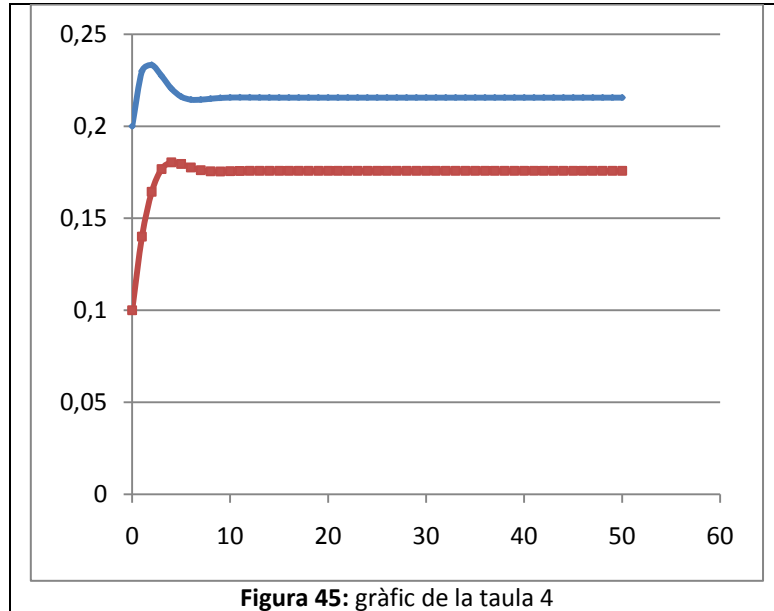
És un dels emblemes del caos, L'ordre dins del desordre.

Dins del conjunt de Mandelbrot també podem trobar atractors i cicles per diferents punts d'origen:

Taula 4: iteració de l'equació $z_{n+1} = z_n^2 + z_0$ per $0,2+0,1i$

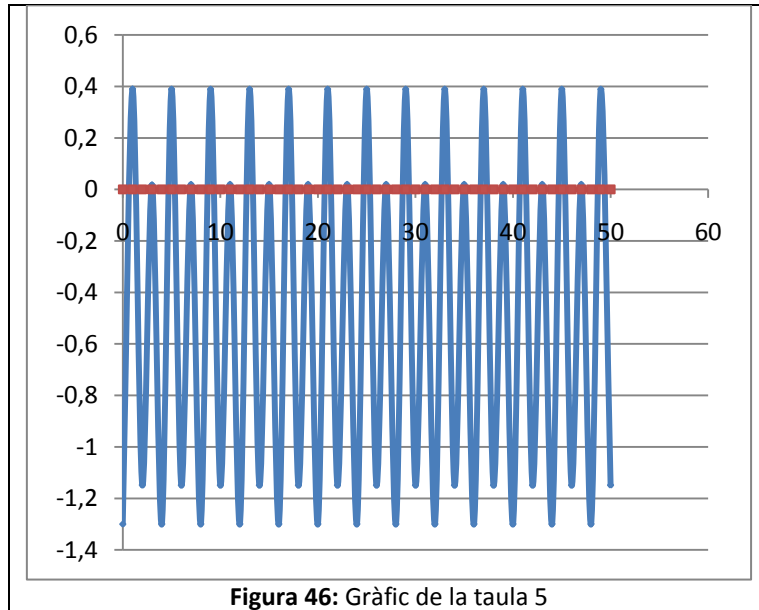
Iteració	Real	Imaginària	Iteració	Real	Imaginària
0	0,2	0,1	11	0,21565124	0,1757135
1	0,23	0,14	12	0,21563022	0,17578567
2	0,2333	0,1644	13	0,21559579	0,1758094
3	0,22740153	0,17670904	14	0,2155726	0,17580754
4	0,22048537	0,18036781	15	0,21556326	0,17579857
5	0,21608125	0,17953693	16	0,21556238	0,17579143
6	0,2144576	0,17758913	17	0,21556451	0,17578804

7	0,21445416	0,17617068	18	0,21556663	0,17578732
8	0,21495448	0,17556107	19	0,21556779	0,17578776
9	0,21538374	0,17547528	20	0,21556813	0,17578836
10	0,21559858	0,17558904			



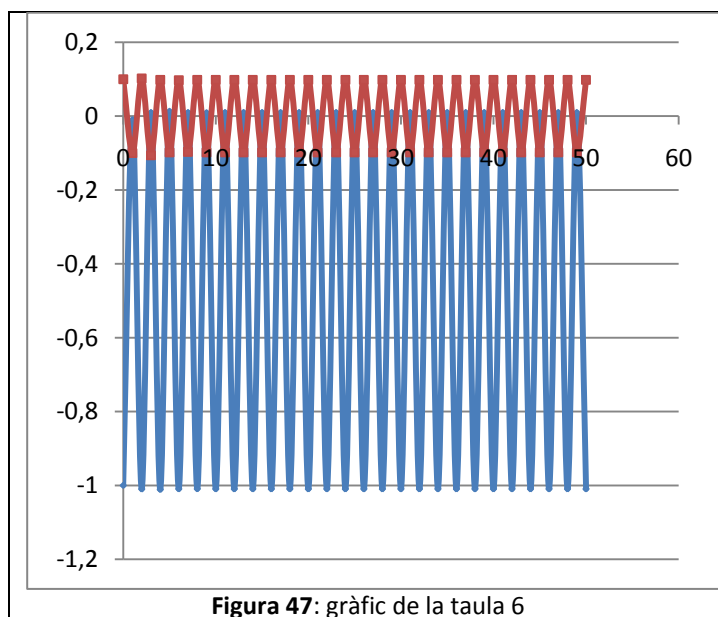
Taula 5: iteració de l'equació $z_{n+1} = z_n^2 + z_0$ per $1,3+0i$

Iteració	Real	Imaginària	Iteració	Real	Imaginària
0	-1,3	0	11	0,01937606	0
1	0,39	0	12	-1,29962457	0
2	-1,1479	0	13	0,38902402	0
3	0,01767441	0	14	-1,14866031	0
4	-1,29968762	0	15	0,01942051	0
5	0,3891879	0	16	-1,29962284	0
6	-1,14853278	0	17	0,38901954	0
7	0,01912755	0	18	-1,1486638	0
8	-1,29963414	0	19	0,01942853	0
9	0,38904889	0	20	-1,29962253	0
10	-1,14864096	0			



Taula 6: iteració de l'equació $z_{n+1} = z_n^2 + z_0$ per $-1+0,1i$

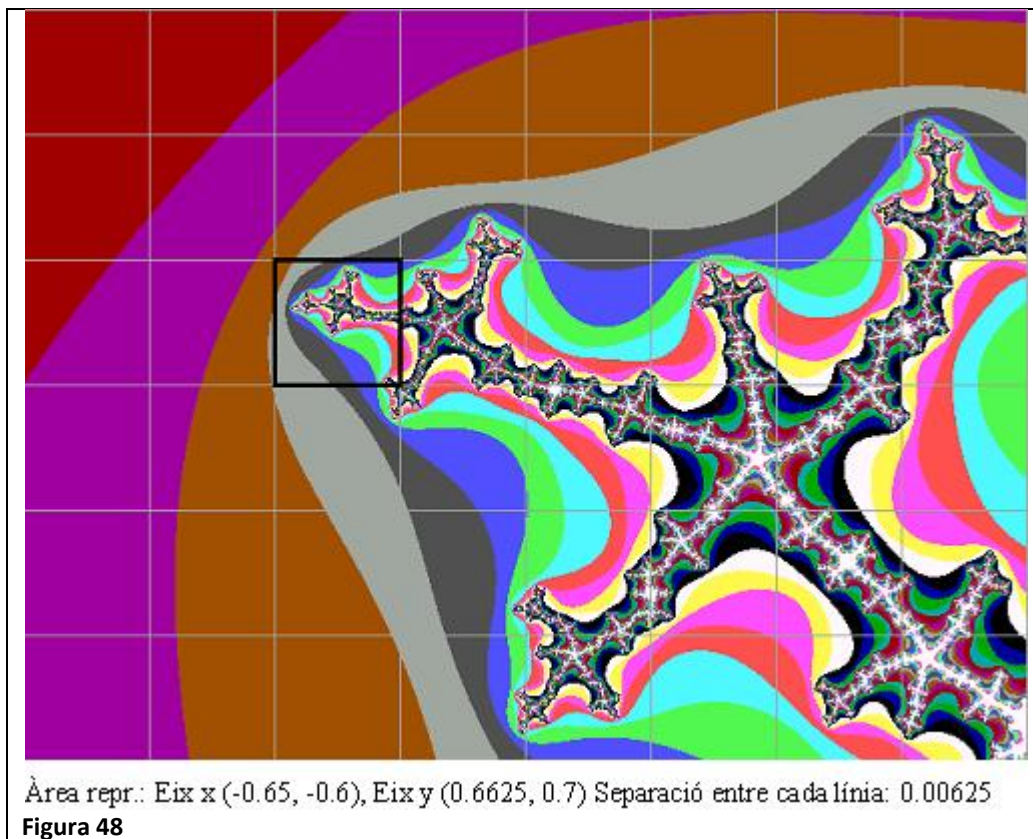
Iteració	Real	Imaginària	Iteració	Real	Imaginària
0	-1	0,1	11	0,00953926	-0,09833723
1	-0,01	-0,1	12	-1,00957921	0,09812387
2	-1,0099	0,102	13	0,00962189	-0,09812764
3	0,00949401	-0,1060196	14	-1,00953645	0,09811165
4	-1,01115002	0,0979869	15	0,00953795	-0,09809458
5	0,01282293	-0,09815891	16	-1,00953157	0,09812876
6	-1,00947074	0,09748263	17	0,00952475	-0,09812816
7	0,00952832	-0,09681173	18	-1,00953841	0,09813071
8	-1,00928172	0,09815509	19	0,00953817	-0,09813344
9	0,00901517	-0,09813228	20	-1,0095392	0,09812797
10	-1,00954867	0,09823064			



En les taules 4, 5 i 6 he separat la part imaginària de la real per iterar. I a sota hi ha els gràfics corresponents a les taules on es representa separatament la part real i la part imaginària en funció de les iteracions. En aquests casos es veu en la taula 4 i el gràfic 45 que hi ha un atractor, en la taula 5 i el corresponent gràfic que n'hi ha 4 i en la taula 6 que n'hi ha dos

Un fractal és la representació gràfica del comportament d'un sistema caòtic

També té molta sensibilitat a les condicions inicials, ho il·lustrarem. Recordem que el conjunt de Mandelbrot són tots els punts del pla complex els quals al ser iterats infinites vegades per l'expressió: $z_{n+1} = z_n^2 + z_0$ mai tendeixen a infinit. Si a l'ordinador se li diu que pinti de colors diferents regions del pla complex segons les iteracions que ha necessitat per saber que el punt en qüestió no pertanyia al conjunt podem obtenir:



En la figura 48 es veu que en una variació de 0,00625 un punt pot convergir o tendir cap a l'infinit, i que també en minses variacions pot tardar, en relació, significativament més o menys a "escapar-se". Hi ha sensibilitat a les condicions inicials.

5. Atractors Estranys

Hem vist que un atractor podia ser el punt al qual el sistema hi tendeix al llarg del temps, o que podia haver-hi més d'un atractor, als quals el sistema hi anava tendint correlativament, formant un cicle.

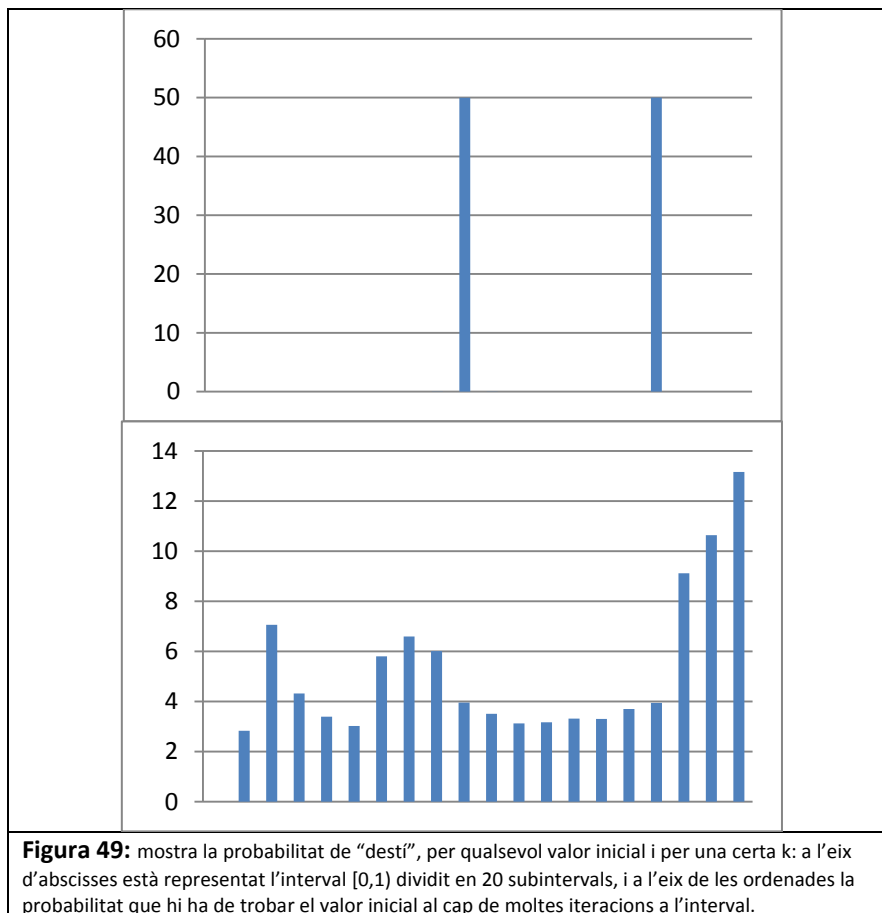
S'anomenen **atractors estranys** o caòtics aquells que no retornen mai al mateix lloc en l'espai de fases, i estan confinats en una determinada regió de l'espai de fases. A més a més tenen una geometria fractal. Les òrbites dintre un atractor estrany semblen saltar aleatòriament.

L'espai de fases és un espai on cada eix és una de les variables del sistema, té tantes dimensions com variables té el sistema. Per tant un punt en l'espai de fases conté tota la informació sobre el sistema en aquell instant i en conseqüència tota la informació futura, perquè està determinat.

No poden retornar mai en el mateix lloc en l'espai de fases ja que si hi retornés ja no seria caòtic, estaria en un cicle, de període més o menys llarg (perquè el sistema està determinat).

Els atractors caòtics, igual que els atractors que ja havíem vist, estan formats per punts, però en aquest cas, evidentment, el nombre de punts és infinit.

La probabilitat que al cap de n iteracions el valor estigui rondant en certes regions és invariant, igual que quan teníem cicles.



En la figura 49 es veu a la part superior la probabilitat que hi ha d'encertar per on rondarà el valor que hem introduït després de n iteracions (a partir d'un cert nombre d'iteracions) per la funció logística per $k = 3,4$. Es veuen els dos atractors. En canvi a la part de sota es veu la probabilitat que hi ha de trobar el valor que hem introduït al cap de n iteracions (a partir d'un cert nombre d'iteracions) segons la regió. (Vegeu l'annex)

Dues orbites començades a una regió pròxima a l'espai de fases se separaran ràpidament ja que els sistemes caòtics, com ja hem dit, tenen gran sensibilitat a les condicions inicials.

Ara és hora de generar un atractor estrany. Farem l'atractor estrany de Hénon, que ve regit pel sistema d'equacions:

$$x_{n+1} = (y_n + 1) - (ax_n^2)$$

$$y_{n+1} = bx_n$$

Per fer els gràfics he pres $a = 1,4$ i $b = 0,3$ i he partit de $x_0 = 0,5$ i $y_0 = 0,5$

Representem els punts resultants de les successives iteracions $(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3).....$
 Primer representem les primeres 500 iteracions.

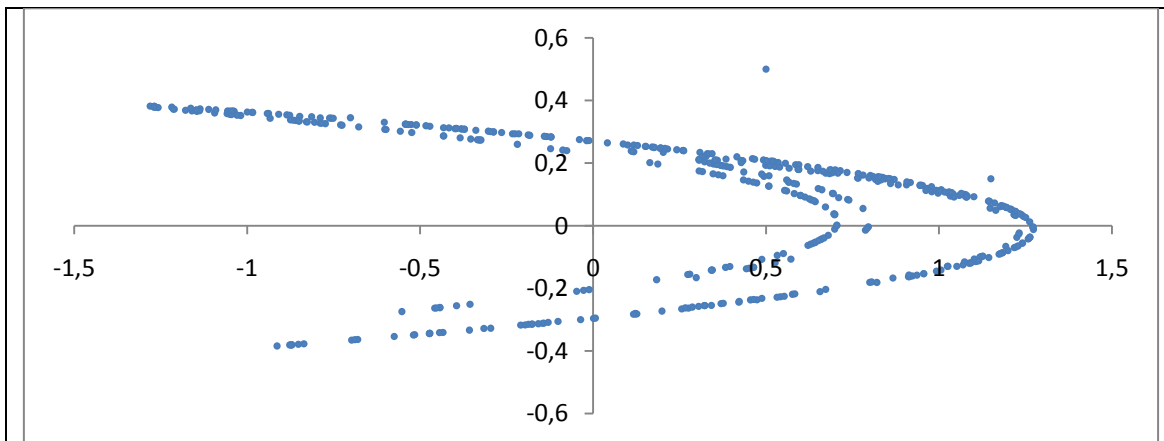


Figura 51: Representació dels 500 primers punts en l'espai de fases.

Veiem que està prenent una forma determinada. I ara amb milers d'iteracions

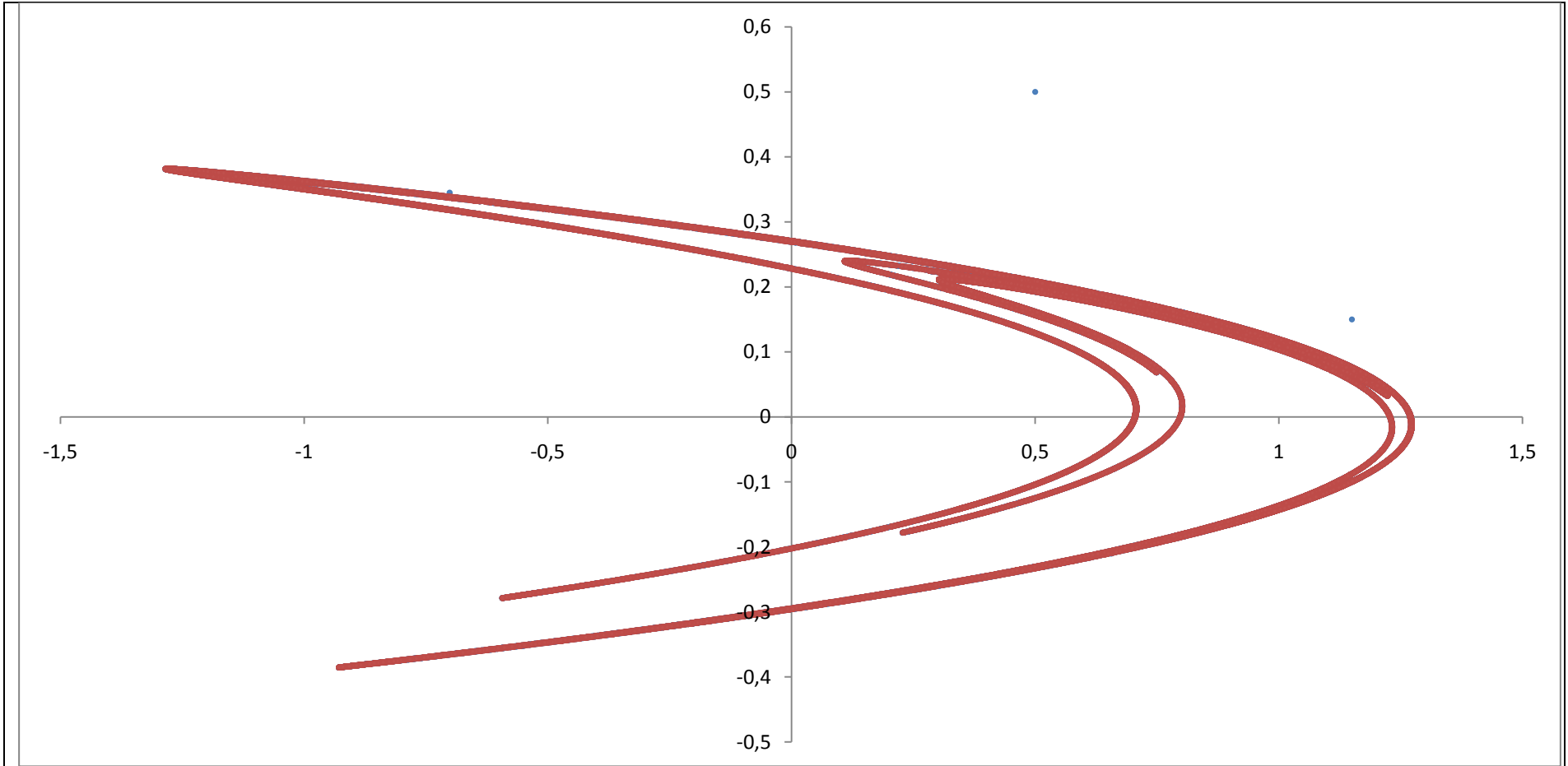


Figura 51: Atractor de Hénon(estan respresentats 64000 punts en l'espai de fases)

El sistema no deixa de ser sensible a les condicions inicials i ser caòtic, tot i així sempre es “confina” en una certa regió de l’espai de fases com comprovarem tot seguit...

Ara mostro les dades i els punts en l’espai de fases amb les equacions de Hénon amb 100 iteracions, i les dades i els punts en l’espai de fases per dos punts d’inici molt semblant.

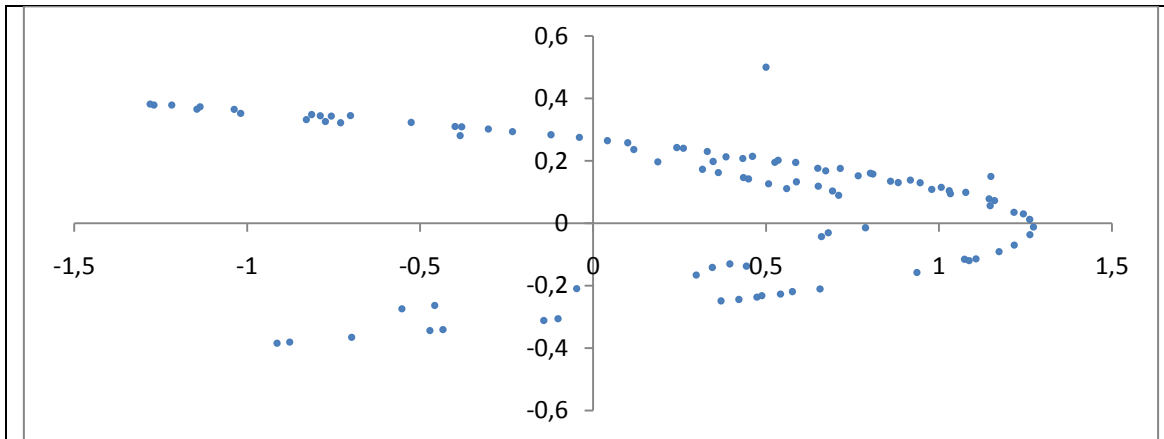


Figura 52: primers 100 punts en l’espai de fases de l’atractor de Hénon començant per $x = 0,5$ i $y = 0,5$

Taula 7: primers 20 valors dels punts de la figura 52.

Iteració	x	y	Iteració	x	y
0	0,5	0,5	11	1,24389401	0,0300147
1	1,15	0,15	12	-1,13616654	0,3731682
2	-0,7015	0,345	13	-0,43405598	-0,34084996
3	0,65605685	-0,21045	14	0,3953836	-0,13021679
4	0,18697517	0,19681706	15	0,65092373	0,11861508
5	1,14787345	0,05609255	16	0,52543269	0,19527712
6	-0,7885663	0,34436204	17	0,8087658	0,15762981
7	0,47379051	-0,23656989	18	0,24188684	0,24262974
8	0,44916169	0,14213715	19	1,1607168	0,07256605
9	0,85969244	0,13474851	20	-0,81360282	0,34821504
10	0,10004898	0,25790773			

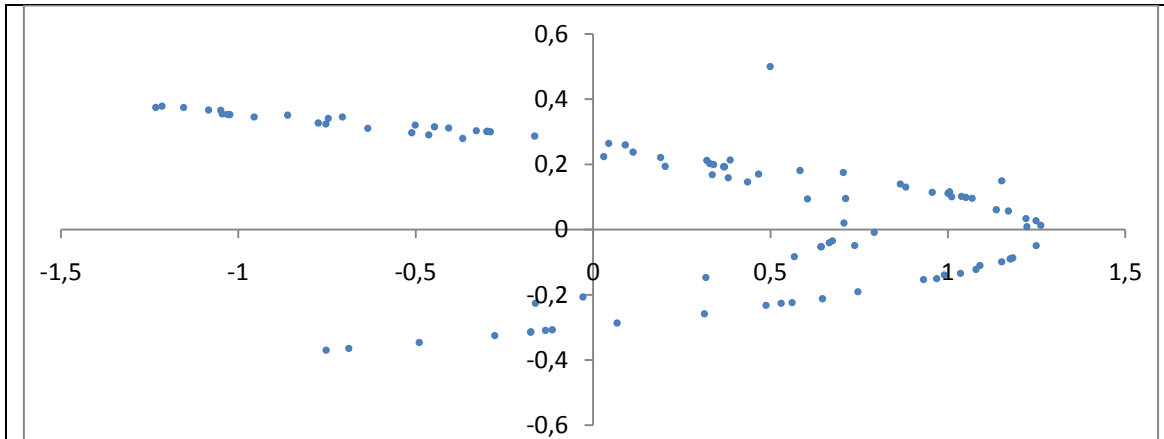


Figura 53: primers 100 punts en l'espai de fases de l'atractor de Hénon començant amb $x = 0,499$ i $y = 0,5001$

Taula 8: primers 20 valors dels punts de la figura 53

Iteració	x	y	Iteració	x	y
0	0,499	0,5001	11	1,15160705	-0,09870736
1	1,1514986	0,1497	12	-0,95538567	0,34548211
2	-0,70662864	0,34544958	13	0,06761561	-0,2866157
3	0,64639594	-0,21198859	14	0,70698368	0,02028468
4	0,20305262	0,19391878	15	0,3205284	0,2120951
5	1,13619627	0,06091578	16	1,06826127	0,09615852
6	-0,74640297	0,34085888	17	-0,50149648	0,32047838
7	0,56089453	-0,22392089	18	0,96838017	-0,15044894
8	0,33563536	0,16826836	19	-0,46331317	0,29051405
9	1,01055683	0,10069061	20	0,98999132	-0,13899395
10	-0,32902453	0,30316705			

Es veu a les taules 7 i 8 que les iteracions divergeixen des de punts molt propers i que si representem els 100 primers punts resultat en l'espai de fases s'intueix la mateixa forma, el mateix atractor de Hénon!!

L'atractor de Hénon és un fractal. I té dimensió fractal de 1,26.

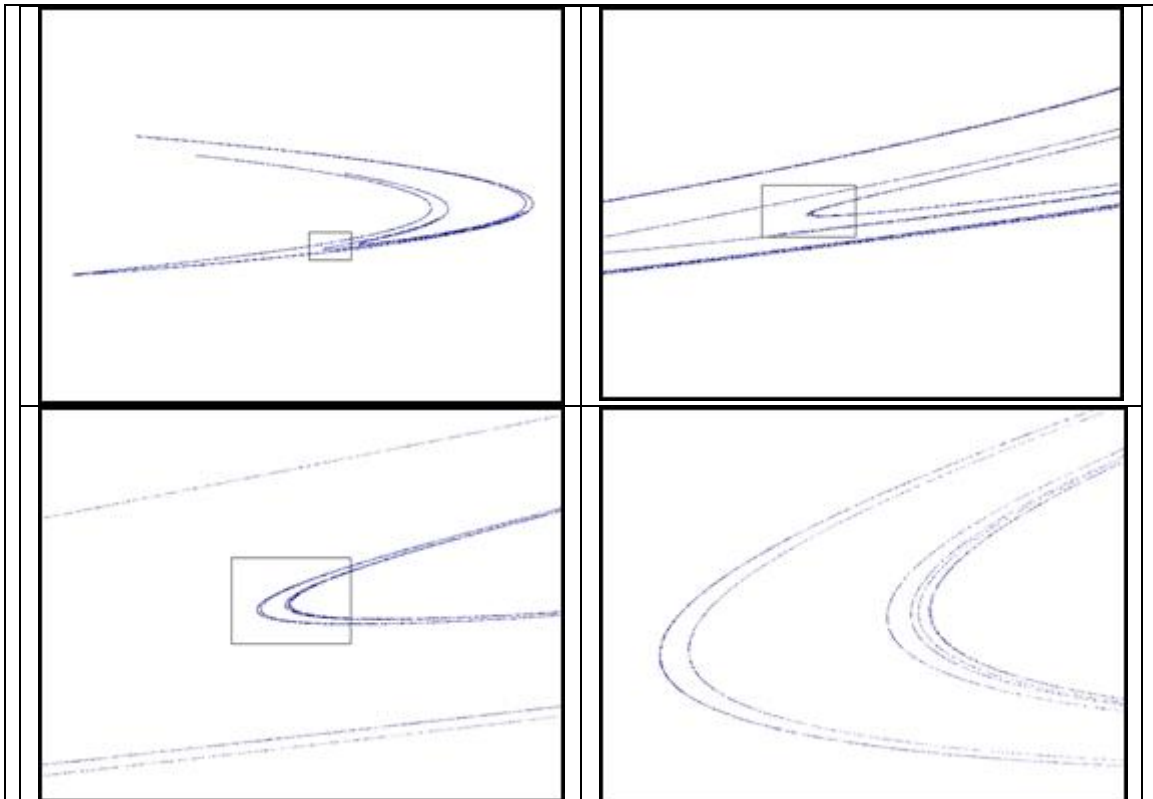


Figura 54: mostra l'auto-semblança a qualsevol escala, l'ampliació de la imatge superior esquerra és la imatge superior dreta, l'ampliació d'aquesta és la imatge inferior esquerra, i l'ampliació d'aquesta la inferior dreta.

Però l'atractor estrany més famós és l'*atractor de Lorenz*.

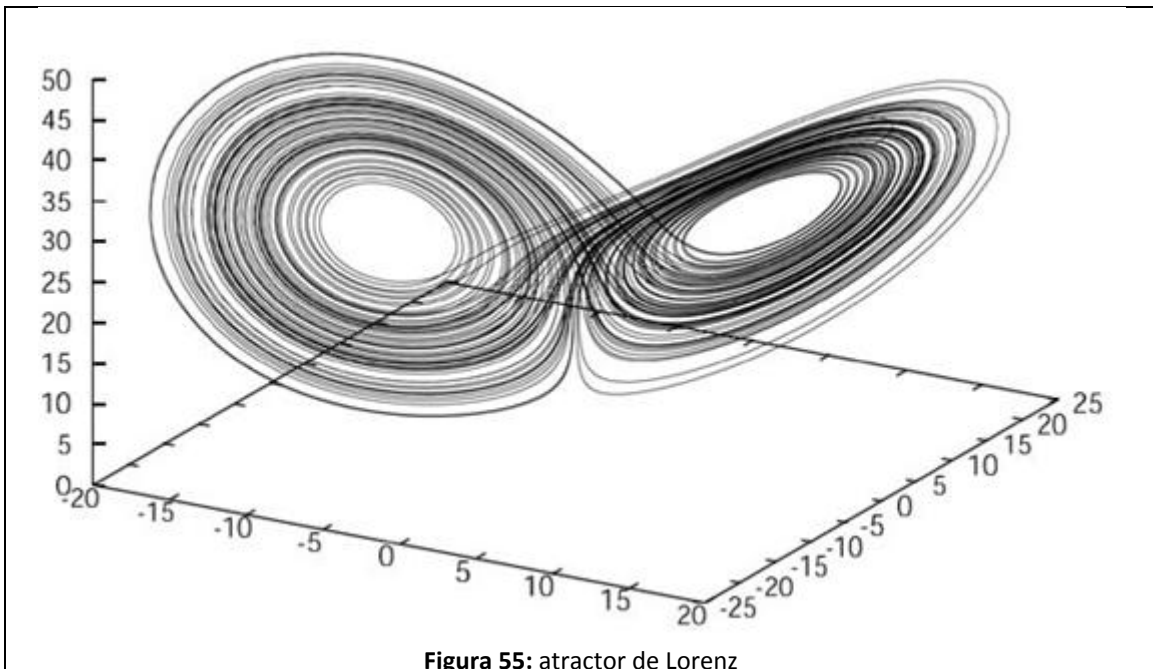


Figura 55: atractor de Lorenz

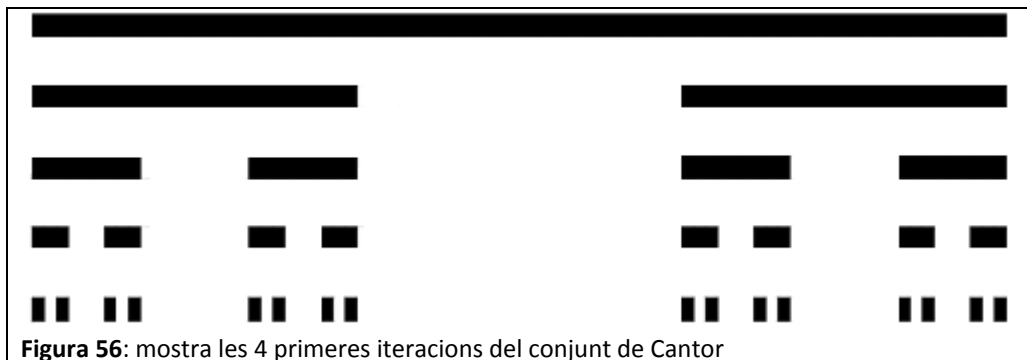
Aquest es regeix per tres equacions diferencials de Lorenz ja esmentades en “Una mirada al Caos”:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a y - a x \\ \frac{dy}{dt} &= r x - y - x z \\ \frac{dz}{dt} &= x y + b z\end{aligned}$$

Aquest atractor és un fractal, i com a tal té una dimensió fraccionària, que és 2,06.

L'atractor estrany de la funció logística, és una espècie de **conjunt de Cantor**, tal i com afirma Douglas R. Hofstadter en l'article de *temas metamágicos en Investigación y ciencia*.

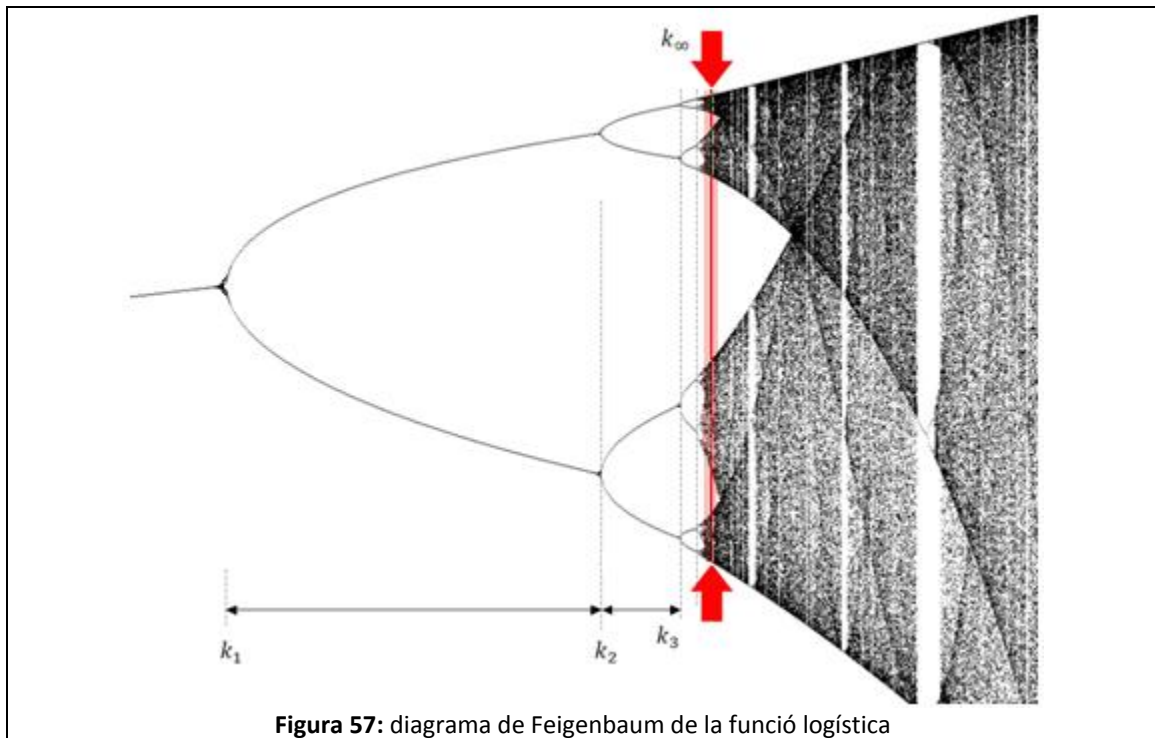
El conjunt de Cantor és un conjunt *no numerable* que es genera de la següent manera: Sigui l'interval tancat $[0,1]$ del qual li retirem l'interval central obert $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ i ens queda el conjunt $A_1 = \{[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]\}$, seguidament retirem els intervals centrals oberts de $(0, \frac{1}{3})$ i de $(\frac{2}{3}, 1)$, ens quedarà el conjunt $A_2 = \{[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]\}$. Si successivament anem retirant els intervals oberts centrals de cada un intervals tancats del conjunt A_n , quan $n \rightarrow \infty$ o tenim el Conjunt de Cantor.



El **conjunt de Cantor** té una dimensió fractal de 0,6309.

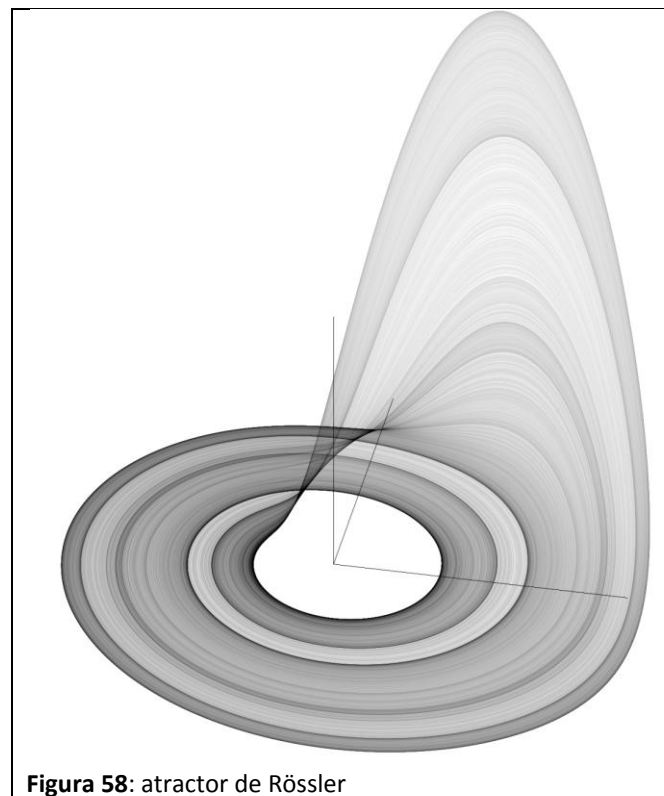
A l'atractor estrany de la funció logística s'hi pot arribar (en lloc de seguir la regla recursiva de retirar el terç del mig) utilitzant la constant de la distància entre els atractors de Feigenbaum(α).

L'atractor caòtic de la funció logística per $k=3,569945672\dots$ són els punts que estan a la línia roja indicada per les fletxes de la figura 57:



L'atractor estrany de la funció logística per aquesta k , són un conjunt de punts infinits, i *no numerables*, el fractal té dimensió 0,538.

Un altre atractor estrany és per exemple, l'**atractor de Rössler**:



Les equacions diferencials que regeixen aquest atractor són:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -(y + z) \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c)\end{aligned}$$

6. Conclusió

Hem vist al llarg del treball que el caos és un procés completament **determinista**, en el qual si coneixem amb exactitud absoluta les condicions inicials d'un sistema i coneixem les lleis que el regeixen, en sabrem sempre el desenvolupament futur. Apareix en **sistemes no lineals** (un sistema lineal és aquell que està format per sumes de variables amb coeficients, en un sistema lineal si **a** i **b** són dues solucions, **a+b** o **3a+b** seran també solució, en un sistema no lineal això no es compleix.). Hem vist que per veure el caos havíem d'iterar, els sistemes caòtics són sistemes **retroalimentats**, és a dir els valors de sortida estaran implicats en l'entrada. El patró majoritari del caos sembla **desorganitzat i erràtic**, de fet podria passar tots els testos estadístics d'aleatorització. El caos pot sorgir de **sistemes simples**, com hem vist en la funció logística o com es pot veure en l'annex amb altres funcions també relativament simples, a temps discrets amb una sola variable i a temps continu en tres o més variables (com en les equacions diferencials de Lorenz. Tot i semblar desorganitzat presenta una "**estructura interna**", com els diagrames de Feigenbaum o els atractors estranys. I en l'espai de fases presenta propietats fractals. Com hem vist a la introducció al caos, aquests sistemes tenen una **gran sensibilitat a les condicions inicials**, una variació als nostres ulls despreciable, provoca canvis completament inesperats. (efecte papallona). Per tant és impossible fer pronòstics a llarg termini, a causa de que no es pot conèixer amb absoluta precisió les condicions inicials del sistema.

Però no obstant, les conclusions que n'he tret d'haver fet aquest treball són més filosòfiques que matemàtiques.

El caos no rau només en un model de poblacions, ni en la funció cosinus, ni en certes equacions diferencials, sinó que està present en el nostre dia a dia en una infinitat de situacions.

Els batecs del cor, el goteig de l'aigua d'una aixeta, el metabolisme d'una cèl·lula, les connexions del cervell, una colònia de formigues, les dinàmiques de l'atmosfera, les òrbites de molts cossos celestes, la inversió del camp magnètic, el creixement de poblacions d'insectes, les col·lisions dels àtoms en un gas, la economia, les nostres xarxes socials, la mateixa humanitat... són exemples de fenòmens caòtics i molts d'ells ben familiars.

Ara em puc mirar el món amb uns altres ulls. He intuït que el món està regit per unes lleis matemàtiques, de les quals potser moltes ni les coneixem, i que aquest món és tan complex que tot i creure que tot estigui determinat no et treu la sorpresa i l'emoció de viure. Ara em pregunto el sentit de la paraula casualitat cada cop que la nombro. Ara sé que el conèixer una persona o no, a fer dos petons o donar la mà en lloc de fer una abraçada pot comportar canvis que no em puc imaginar. Tot i així, ara sé que no cal patir tampoc per aquestes coses, ja que són impossibles de controlar.

La teoria del caos té aplicacions tant en astronomia com en biologia, economia, electrònica, hidrodinàmica, medicina, òptica, química...

En la realització d'aquest treball he descobert una nova vesant de les matemàtiques, que l'he descobert, en gran part, experimentalment i que és una de les "fronteres" del coneixement de les matemàtiques.

Agraïments

Com ja he dit, quan vaig començar el treball no en sabia absolutament res sobre el tema. Ha sigut gràcies al meu tutor i professor de matemàtiques Albert Armenteras que he pogut realitzar aquest treball, sense ell com a tutor m'hagués sigut completament impossible. Ell m'ha proporcionat gairebé tota la bibliografia, que no és poca, que he utilitzat per entendre i fer el treball i ha dedicat part del seu temps lliure a aclarir-me dubtes molt amablement.

També agraeixo a en Xavier Pujol i Algué, llicenciat en matemàtiques, la seva ajuda en el tema dels fractals i la seva disposició.

7. Annexos:

Annex 1: Caos en el mètode de Newton

Annex 2: Altres funcions caòtiques

Annex 3: L'experiència de la probabilitat invariant

Annex 4: Exponents de Lyapunov

Annex 5: L'atractor d'Hénon

Annex 6: El pèndol magnètic

Annex 1: Caos en el mètode de Newton

El mètode de Newton Raphson és un algoritme per trobar aproximacions a les arrels d'una funció. Veurem que en aquest mètode podem arribar al caos i de nou apareixeran els fractals.

Sigui f una funció contínua i derivable que pren valors de signe oposat en els extrems de l'interval tancat $[a, b]$, llavors existirà un punt α tal que $f(\alpha)=0$. No sempre és fàcil trobar aquesta arrel α . El mètode de Newton és un mètode iteratiu que permet una aproximació tant fina com es vulgui a l'arrel α **sempre i quan es parteixi d'un punt a suficientment proper a l'arrel**. S'aproxima la funció f utilitzant la recta tangent al punt d'inici a i es troba el punt de tall d'aquesta recta amb l'eix d'abscisses que en diem a_1 . Aquest punt a_1 (si s'ha escollit un bon punt d'inici) hauria de ser una aproximació a l'arrel α millor que el punt d'inici a . Seguidament a partir d'aquest punt a_1 aproximem de nou la funció utilitzant la tangent de f en el punt a_1 i trobem de nou el punt de tall de la recta tangent amb l'eix d'abscisses a_2 i així successivament. Veiem-ne la fórmula:

Equació recta tangent a f en el punt a_0 : $y = f'(a_0)x + m$, com ha de passar pel punt $(a_0, f(a_0))$ tindrem que $f(a_0) = f'(a_0)a_0 + m$; $m = f(a_0) - f'(a_0)a_0$ i per tant l'equació de la recta serà:

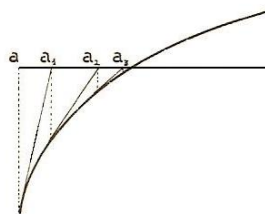
$$y = f'(a_0)x + f(a_0) - f'(a_0)a_0 ; y = f(a_0) + f'(a_0)(x - a_0)$$

Aquesta recta tallarà l'eix d'abscisses en el punt a_1

$$0 = f(a_0) + f'(a_0)(a_1 - a_0), \text{ llavors } a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)}$$

En general, la fórmula iterativa serà:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}. \text{ En diem } \mathbf{\textit{funció de Newton}} \text{ a } N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$



Si s'ha escollit un punt d'inici a adequat, passarà que la successió a, a_1, a_2, \dots, a_n convergirà a l'arrel α .

Cal agafar un punt d'inici suficientment proper a l'arrel de manera que no ens trobem amb cap punt que anul·li el denominador f' , ja que per valors de f' propers a zero N es dispara i si f' val zero, llavors no es pot continuar iterant, ja que no està definit.

Però què pot passar si el punt d'inici no reuneix les condicions adequades?

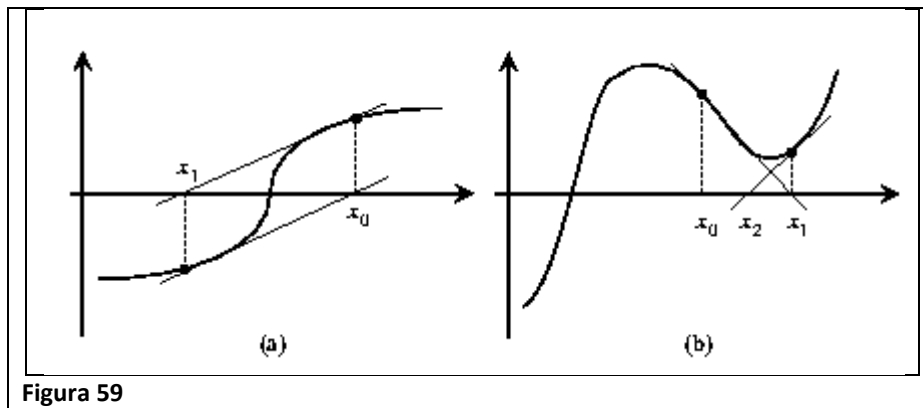


Figura 59

Poden passar coses curioses. Pot ser que la successió entri en un cicle (figura 59a) o que convergeixi a un punt que no sigui una arrel (figura 59b). Però també podria passar que tingués un comportament erràtic de manera que se "salti" d'un interval (veure més endavant) a un altre sense quedar-se mai en un d'ells.

Si pintéssim cada punt de la recta real convergent a una arrel, d'un determinat color segons l'arrel, podríem dibuixar un mapa sobre les abscisses que per a la funció de l'exemple següent es veuria:

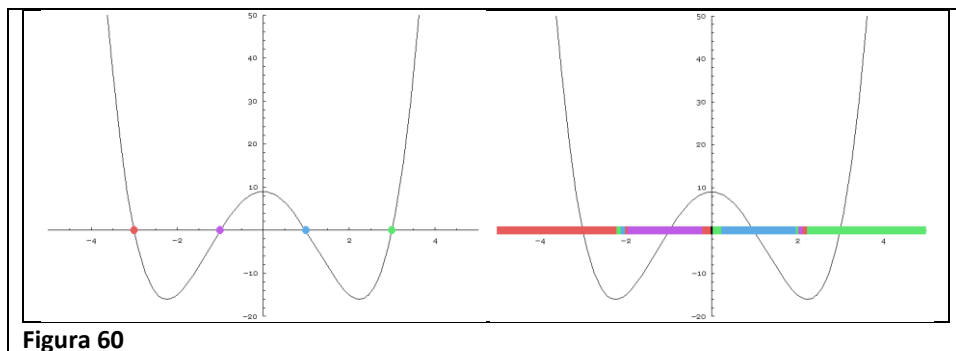


Figura 60

A la figura 60 podem observar com en les zones frontereres els intervals d'atracció principals "salten" a arrels distants. Quan es parteix d'un punt no adequat (no suficientment proper a l'arrel), el mètode de Newton es pot tornar sensible a les condicions inicials, la qual cosa és una de les característiques del caos, de tal manera que petitíssimes diferències en el punt d'inici, originen resultats completament diferents. Veiem-ho en un altre exemple:

Si apliquem el mètode de Newton a la següent funció:

$$f(x) = \frac{x^7 - 14x^5 + 49x^3 - 36x}{25}$$

Partint d'un determinat punt, després de saltar d'un interval a un altre, convergeix a una arrel:

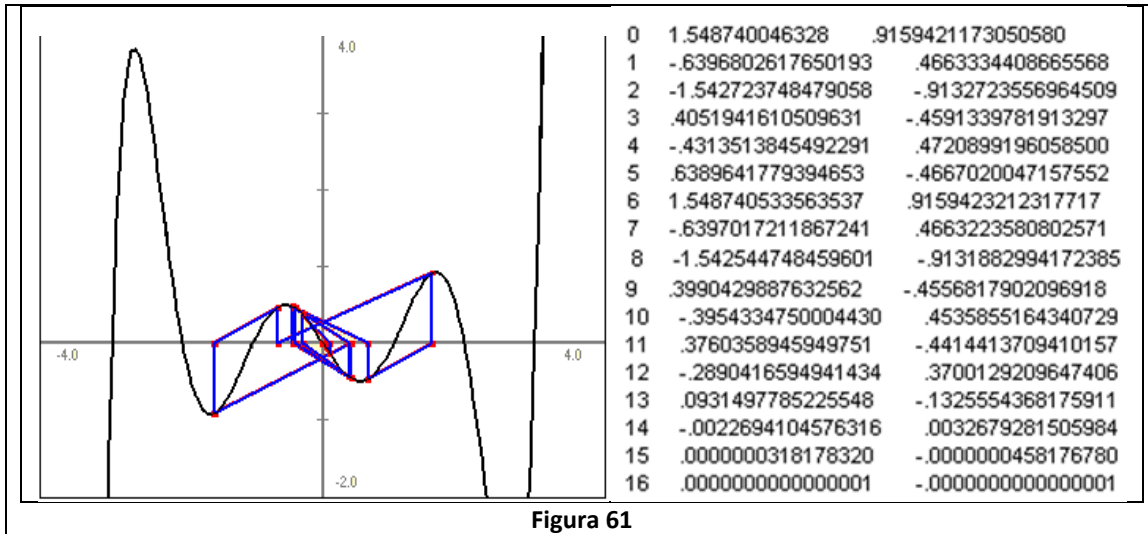


Figura 61

Pero si s'agafa un punt inicial que difereix només 10^{-11} ens trobem que salta a una altra arrel:

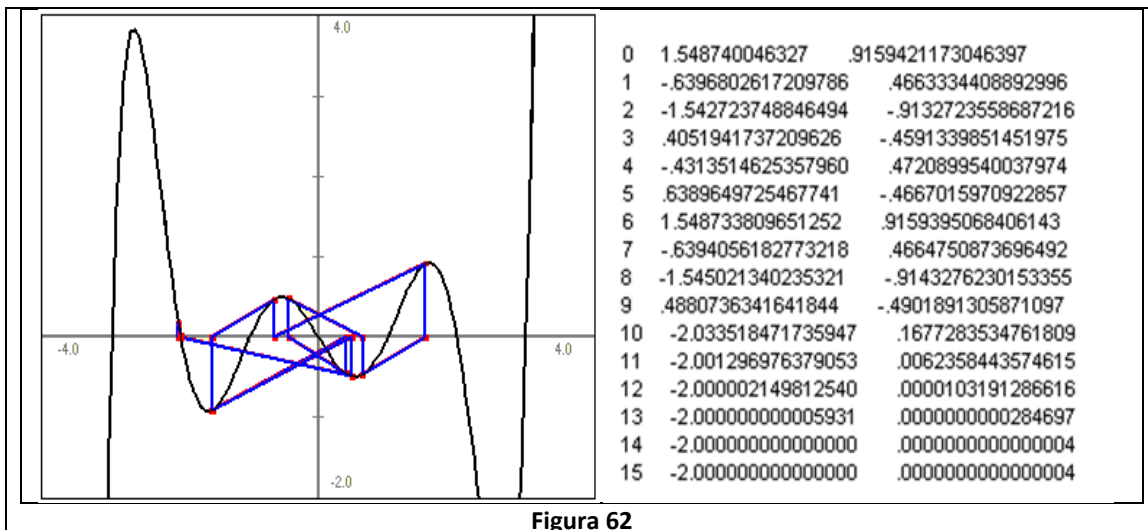
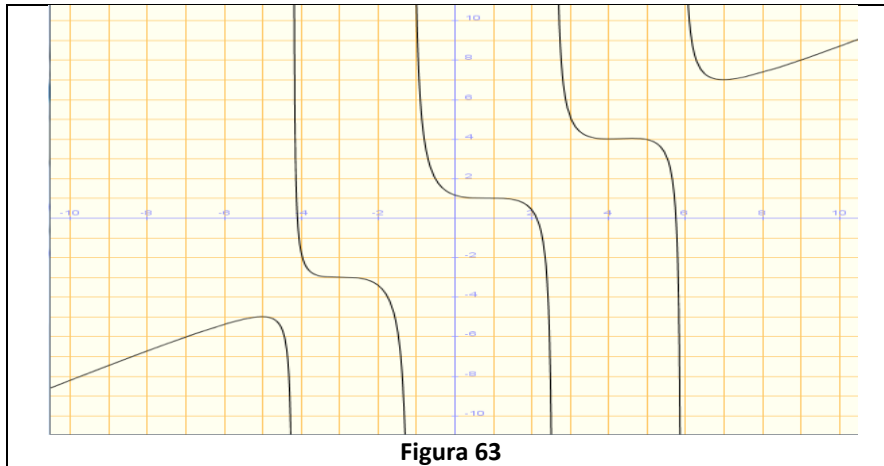


Figura 62

Tal com hem dit, els punts no convergents poden saltar indefinidament d'un interval a un altre definint una seqüència altament erràtica. Observem en els exemples anteriors que passa quan el punt d'inici està prop d'un màxim o d'un mínim...

D'altra banda, analitzant la **funció de Newton** $N(x)$ veiem que té al denominador la funció derivada $f'(x_n)$, per tant tindrà tantes asíptotes com zeros tingui $f'(x)$. Aquestes asíptotes delimiten uns intervals (I) . A continuació podem veure la representació de $N(x)$ per a la funció $(x + 5)(x + 3)(x - 1)(x - 4)(x - 7)$.

$$N(x) = x - \frac{(x + 5)(x + 3)(x - 1)(x - 4)(x - 7)}{d[(x + 5)(x + 3)(x - 1)(x - 4)(x - 7)]} dx$$



Si f és un polinomi de grau m que té m arrels reals **diferents**, llavors $N(x)$ tindrà $m - 1$ assímptotes que delimitaran m intervals $I_1, I_2 \dots I_m$ (ja que si f és de grau m , la derivada serà de grau $m - 1$, per tant, hi hauran $m - 1$ punts on la derivada sigui 0). Considerem ara un dels intervals, per exemple I_2 on $N(x)$ té per imatge $(-\infty, +\infty)$, que és la totalitat de la recta real. Llavors, en la següent iteració $N(N(x))$, els valors corresponents a l'interval inicial I_2 , ara són $(-\infty, +\infty)$ és a dir, tota la recta real com a valors entrants (igual que en la primera iteració) i tindrà una gràfica anàloga amb $m - 1$ assímptotes, delimitant per tant m intervals. Això es repetirà per a cada interval comprès entre assímptotes ($I_3, I_4 \dots$). El nombre d'intervals que tenen per imatge $(-\infty, +\infty)$ s'haurà elevat al quadrat. I així successivament per a les següents iteracions. (Podríem dir que anem "comprimint" la recta real en un interval a cada iteració, això donarà gran sensibilitat a les condicions inicials, s'ha de dir que no es fa de igual manera, sinó que al voltant de l'arrel es comprimeix molt menys que en les assímptotes, fet que provocarà que sigui a l'entorn d'aquestes on es produeixi el caos)

Hi hauran m punts fixos de $N(x)$ corresponents a les m arrels de f .

Els punts amb un cicle de període 2 són els que satisfaran que $N(N(x)) = x$ i no verifiquen $N(x) = x$ i per tant corresponen als nous punts d'intersecció de la gràfica de la segona iteració amb la recta $y = x$

A continuació he utilitzat el programa **Derive 6** per representar pel polinomi següent la funció de Newton.

$$x^4 - 4 \cdot x^3 + x^2 + 6 \cdot x$$

L'expressió següent correspon a $N(x)$

$$x - \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x}{4x^3 - 12x^2 + 2x + 6}$$

A continuació tenim $N(N(x))$:

$$\frac{x^4 \cdot (3x^2 - 8x + 1) \cdot (81x^{10} - 936x^9 + 4257x^8 - 9376x^7 + 9435x^6 - 1832x^5 - 3265x^4 + 1944x^3 - 272x^2 - 264x + 36)}{8 \cdot (2x^3 - 6x^2 + x + 3) \cdot (27x^{12} - 324x^{11} + 1527x^{10} - 3390x^9 + 2807x^8 + 1880x^7 - 4281x^6 - 346x^5 + 3974x^4 - 768x^3 - 1818x^2 + 324x + 324)}$$

Aquesta és la representació gràfica de $N(x)$ i la recta $y = x$, els punts de tall corresponen a les arrels del polinomi, que són $\{-1,0,2,3\}$, també s'observen els punts on la derivada val 0, que són les assíptotes verticals(3). I l'eix d'abscisses queda dividit en quatre intervals I_1, I_2, I_3, I_4 delimitats per les asíptotes. En I_2 i I_3 $N(x)$ té per imatge tots els nombres de la recta real.

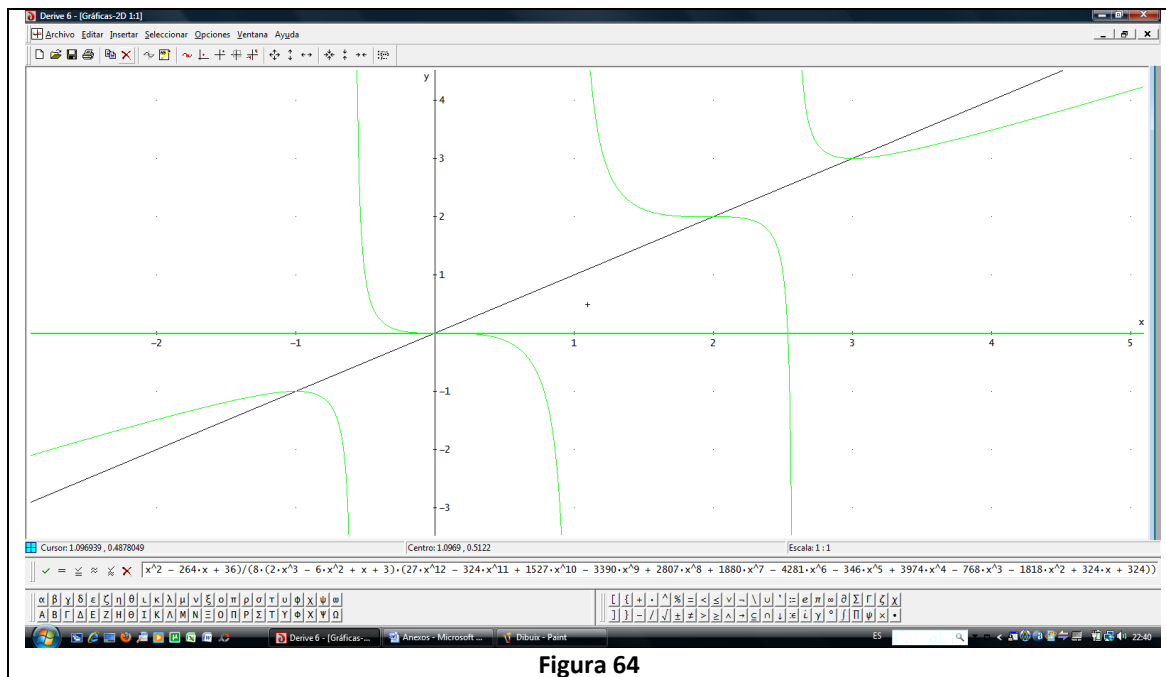


Figura 64

La figura 64 mostra la recta $y = x$ i la representació de $N(x)$ (verd) i de $N(N(x))$ (lila). Ara han aparegut 2 nous punts de tall en els intervals que correspondrien a I_2 i I_3 de la primera iteració. Són els punts que generen un cicle de període 2.

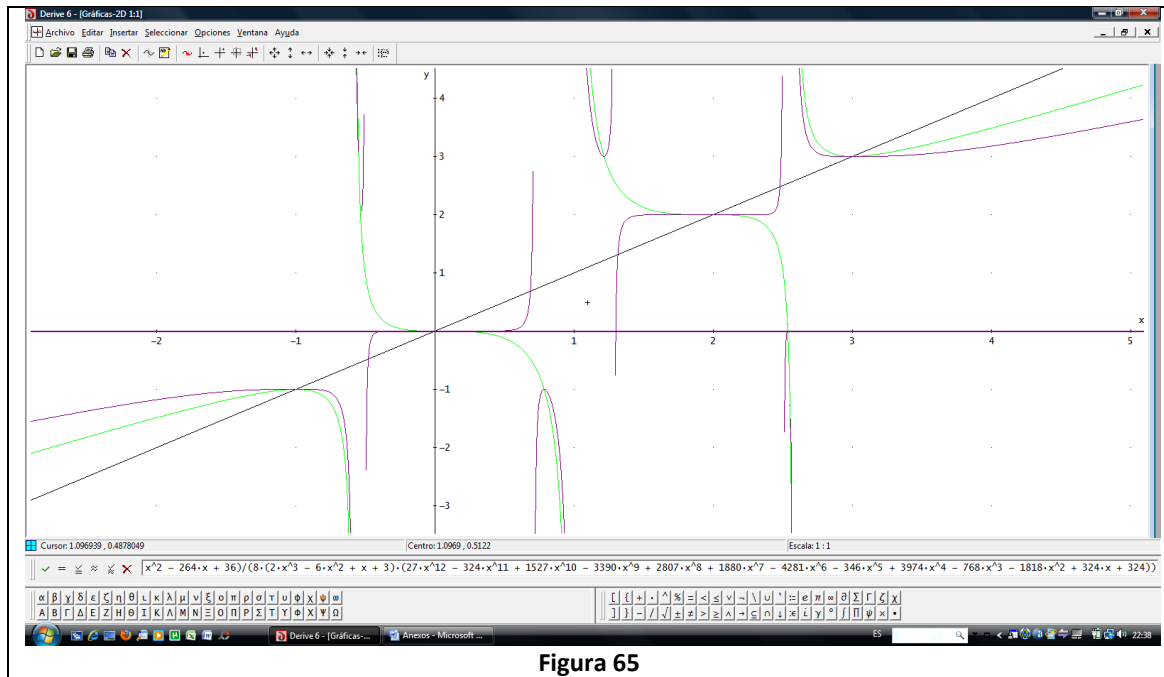


Figura 65

Com que hem introduït tots els valors de la recta real ens surt un gràfic anàleg. Al gràfic costa d'observar-ho, però hi ha dintre cada interval que conte tota la recta real altra vegada el mateix nombre d'intervals que hi havia a la primera iteració(hi ha auto-semblança).

Observem que els punts fixos de la primera iteració (arrels del polinomi de quart grau) tenen pendent 0.

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$N'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)f'(x)}$$

Com que el valor és una arrel del polinomi, anul·la $f(x)$

$$N'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x)}{f'(x)f'(x)} = 0$$

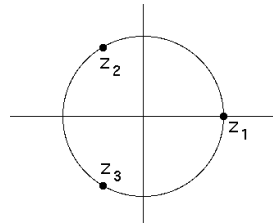
Per tant com tenen el valor absolut del pendent més petit que 1, seran atractors, que ja és el que busca el mètode de Newton, que ens anem aproximant a un atractor, l'arrel.

En canvi en la segona iteració veiem que els dos nous punts fixos tenen clarament el valor absolut del pendent més gran que 1, per tant seran repulsors.

Si anem iterant ens anirem trobant en la franja que està a prop de les asímptotes els punts fixos per la iteració n que donaran lloc a cicles de període n, podem trobar consegüentment cicles de tots els períodes i tots els punts fixos que anem trobant seran sempre repulsors ja que sempre ens els trobarem a prop de les asímptotes ja que la zona on hi ha l'arrel és gairebé plana i per tant no s'altera gairebé gens en la iteració, pel contrari a la zona de l'asímtota, molt. En aquella zona el mètode de Newton té un comportament caòtic.

També amb el **mètode de Newton** es poden obtenir imatges fractals quan s'utilitza en funcions complexes. Per exemple,

$f(z) = z^3 - 1$ Té una sola arrel real, però també té dues arrels imaginàries. Les tres arrels z_1, z_2 i z_3 de mòdul 1 i simètriques són: $\{1, (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i), (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)\}$ que representades en el pla:



Aplicuem l'algorisme de Newton per a veure a quines arrels convergeix cada punt del pla complex.

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2}$$

Per exemple agafem $z_0 = i$

$$z_1 = i - \frac{i^3 - 1}{3i^2} = i - \frac{-i - 1}{-3} = \frac{2i - 1}{3}$$

$$z_2 = \frac{2i - 1}{3} - \frac{\left(\frac{2i - 1}{3}\right)^3 - 1}{3\left(\frac{2i - 1}{3}\right)^2} = \frac{131 + 208i}{225}$$

...

Si continuéssim la iteració veuríem que la successió convergiria a l'arrel z_2 . Si això ho fèssim per a cada un dels punts del pla i pintéssim cada punt inicial convergent d'un color diferent segons a l'arrel a la qual arriba, obtindríem una figura. D'entrada algú podria pensar que obtindríem la figura 66 (a)

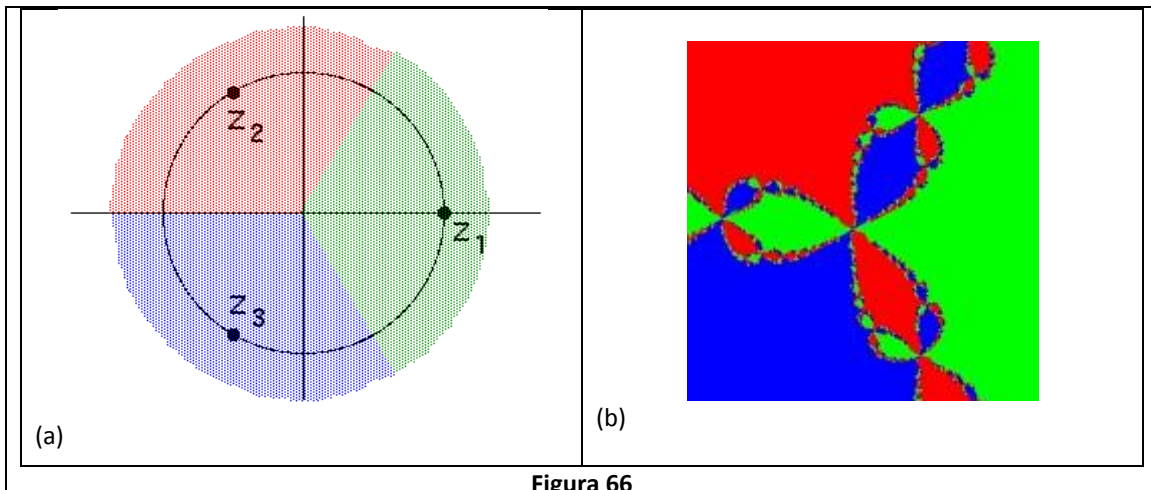
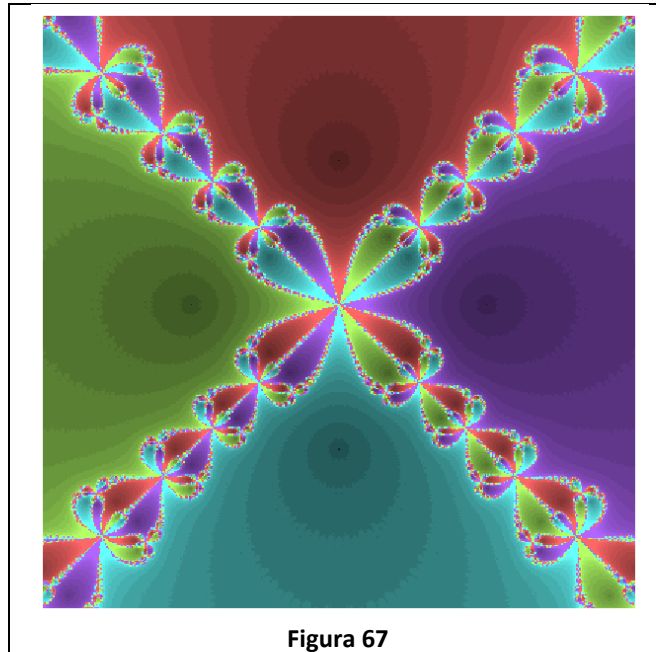


Figura 66

Però en realitat obtenim la figura 66(b), on hi ha 3 conques principals d'atracció entorn a les 3 arrels, però la frontera té una gran complexitat, cada cercle que enclou punts de dos colors, també inclou punts del tercer color. En els punts mateixos de la frontera, Newton és caòtic i no convergeix a cap arrel.

Anàlogament, pel cas de $f(z) = z^4 - 1$, té 4 arrels: $\{-1, 1, i, -i\}$ les conques d'atracció trobades per iteració mitjançant Newton tenen l'estructura del següent gràfic. Veiem ara que hi ha 4 conques d'atracció majoritàries amb un frontera similar al cas anterior.

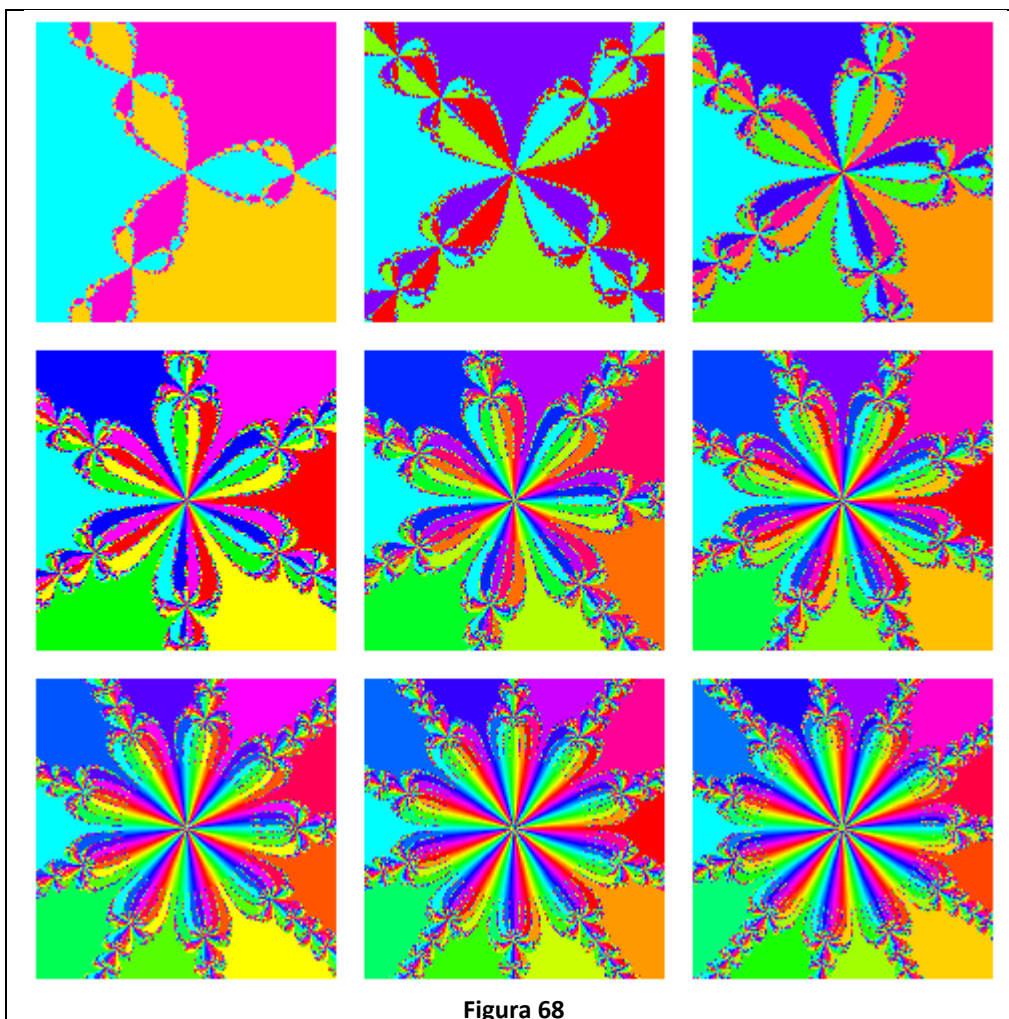


Cada punt de la frontera toca a totes les quatre conques d'atracció.

En general per $f(z) = z^m - 1$

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^m - 1}{mz_n^{m-1}}$$

La figura 68 mostra els fractals per $m=3,4,\dots,11$.



Annex 2:Altres funcions caòtiques

En aquest annex he fet un llistat d'algunes funcions caòtiques, mostro alguns diagrames de Feigenbaum d'algunes altres funcions i he realitzat uns arxius amb el Microsoft Excel, on es poden veure els gràfics de les primeres iteracions variant la k , i també s'observa el valor en funció de la iteració, també es poden modificar el paràmetres de k i x_0 , presents al CD.

Llista d'algunes funcions caòtiques

- $x_{n+1} = k \cos x_n$
- $x_{n+1} = k \sin x_n$
- $x_{n+1} = k e^{x_n}$
- $x_{n+1} = k x_n (1 - \frac{x_n^2}{3})$
- $x_{n+1} = k x_n^2 (2 - x_n^2)$
- $x_{n+1} = x_n^2 + k$
- $x_{n+1} = -k |x_n - 0,5| + \frac{k}{2}$
- $x_{n+1} = k - x_n^2$
- $x_{n+1} = (x_n - 2)^2$
- $x_{n+1} = k(3x_n - 4x_n^3)$
- $x_{n+1} = x_n e^{k(1-x_n)}$
- $x_{n+1} = k x_n (1 - x_n)$

Alguns sistemes d'equacions caòtics:

Les equacions diferencials de Lorenz

$$\frac{dx}{dt} = a y - a x$$

$$\frac{dy}{dt} = r x - y - x z$$

$$\frac{dz}{dt} = x y + b z$$

Les equacions de Rössler:

$$\frac{dx}{dt} = -(y + z)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay$$

$$\frac{dz}{dt} = b + z(x - c)$$

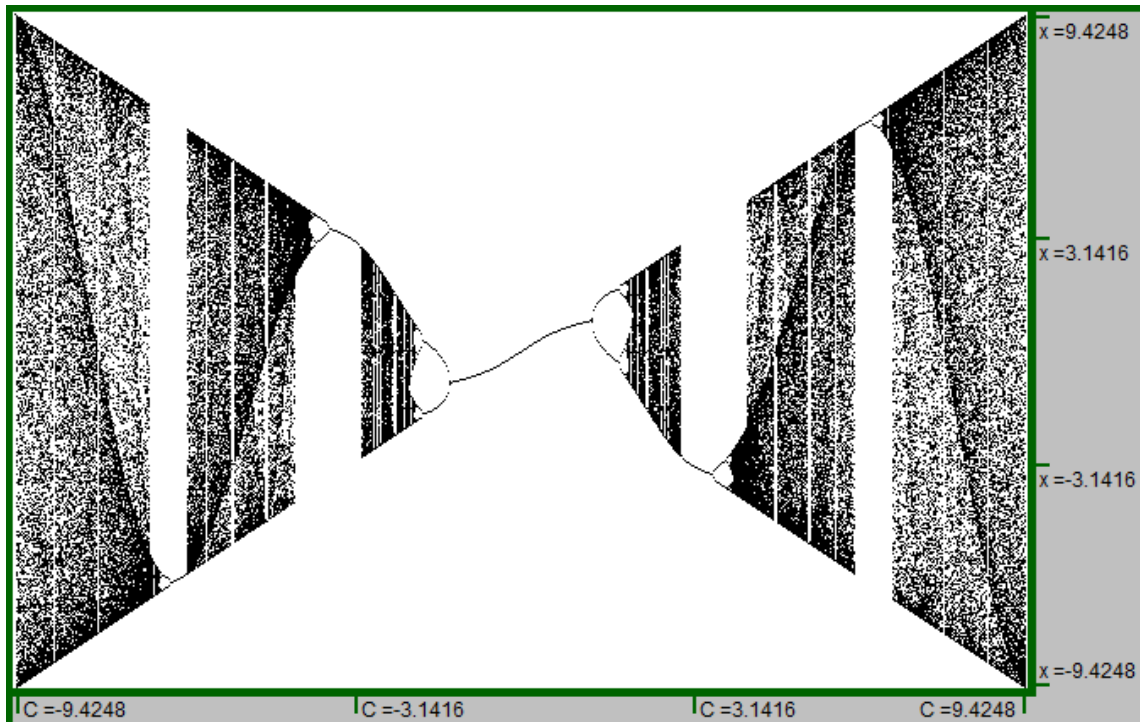
Les equacions per l'atractor de Hénon:

$$x_{n+1} = (y_n + 1) - (ax^2)$$

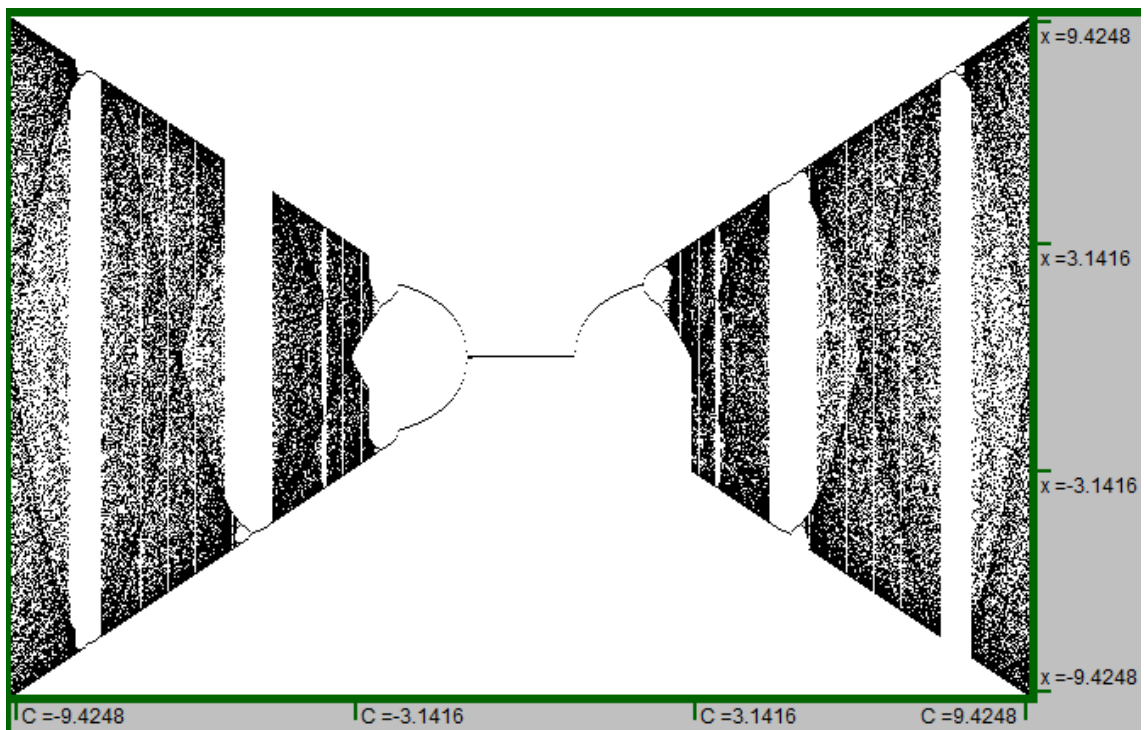
$$y_{n+1} = bx_n$$

Alguns diagrames de Feigenbaum de funcions caòtiques:

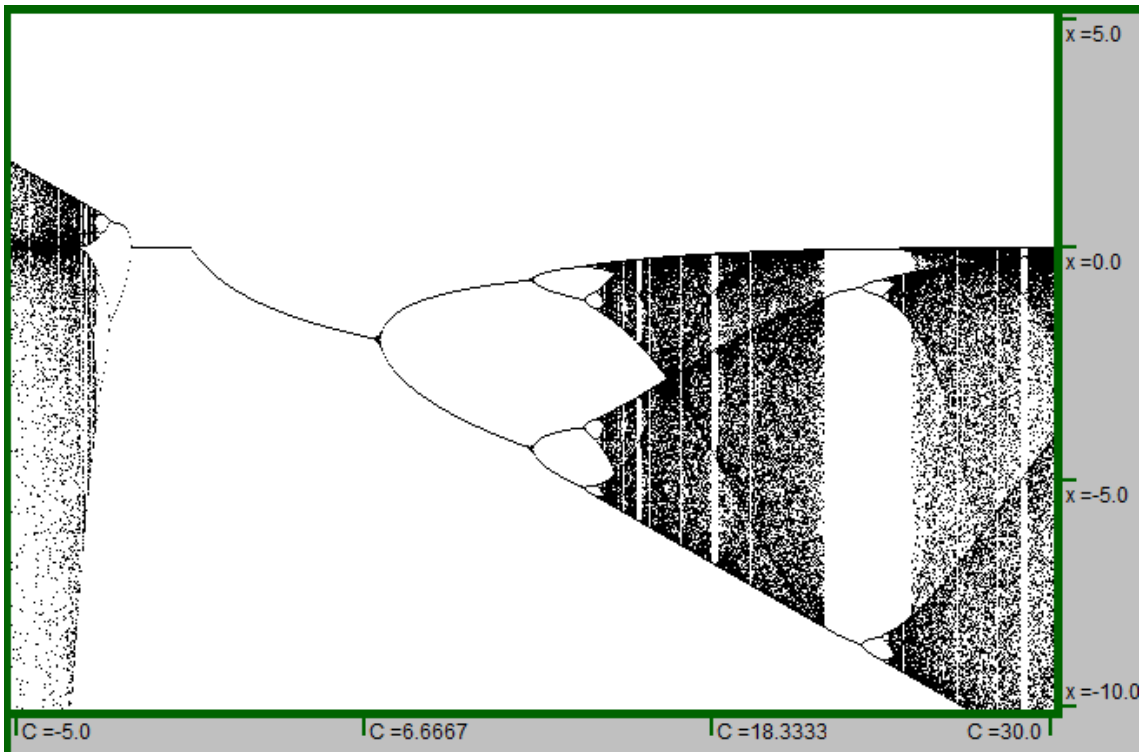
$$x_{n+1} = k \cos x_n$$



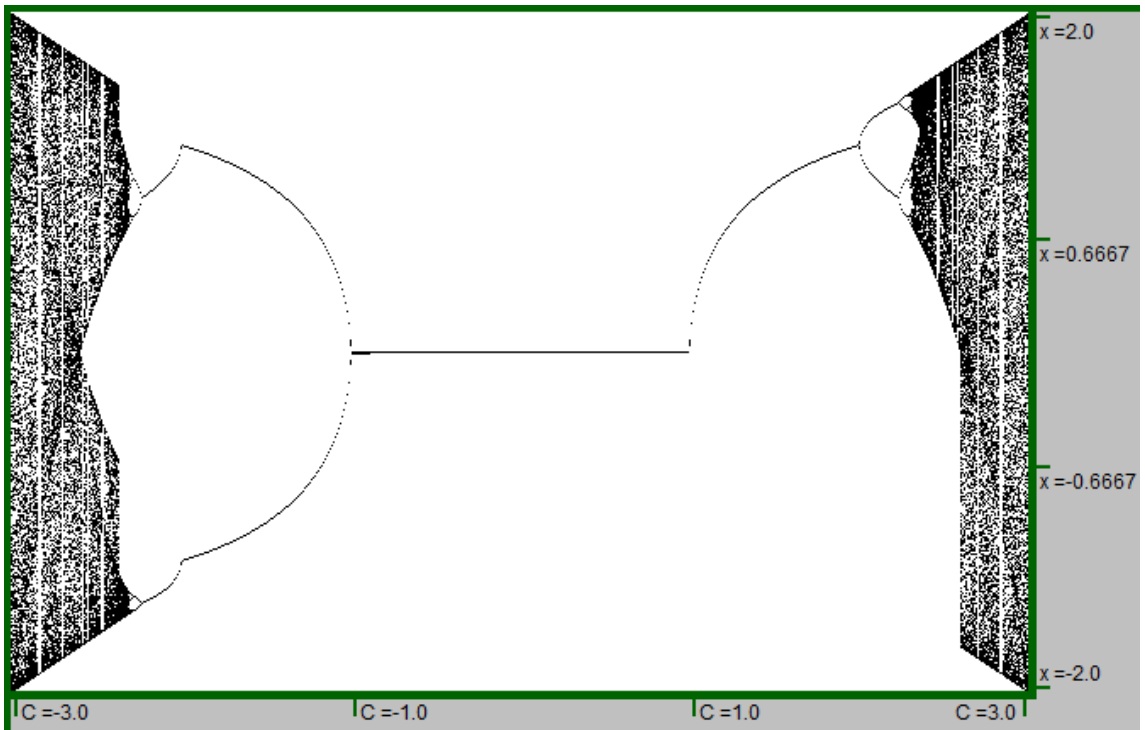
$$x_{n+1} = k \sin x_n$$



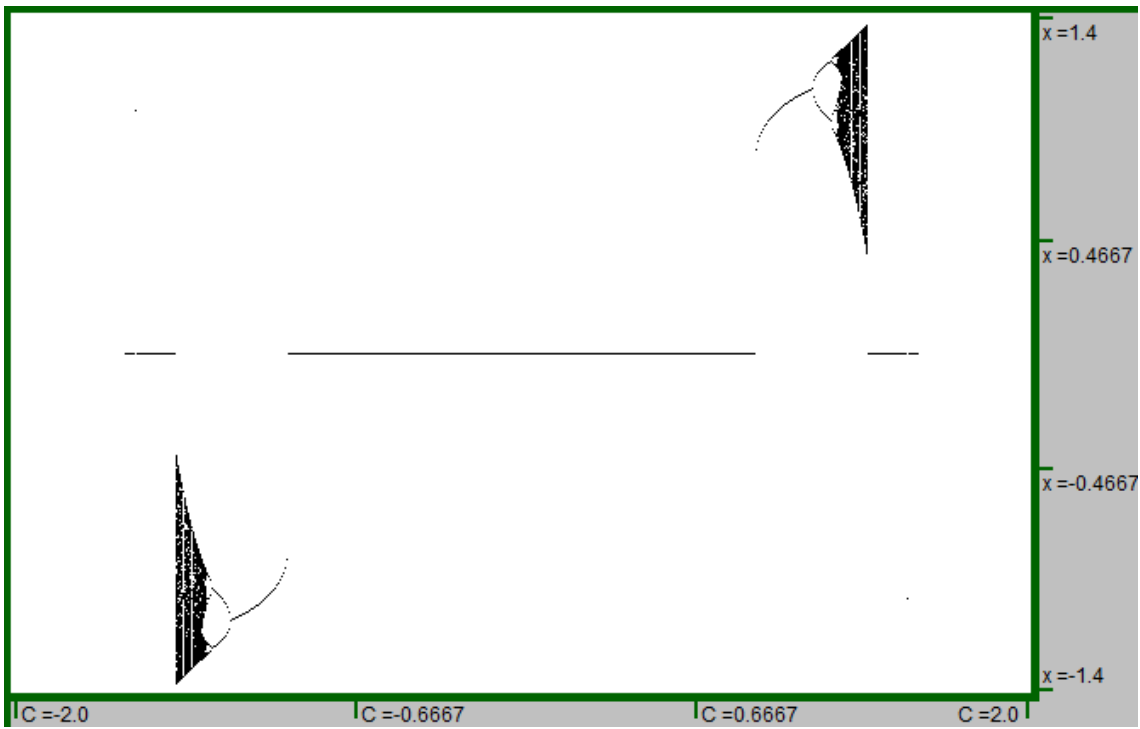
$$x_{n+1} = ke^{x_n}$$



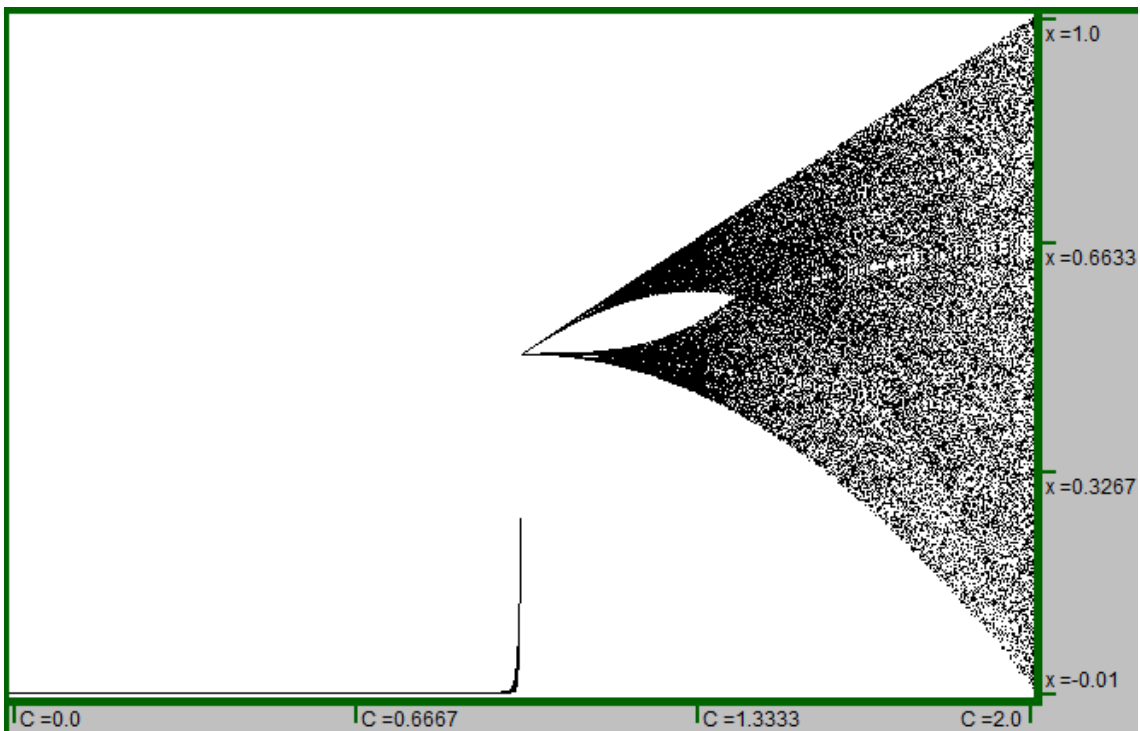
$$x_{n+1} = k x_n \left(1 - \frac{x_n^2}{3}\right)$$



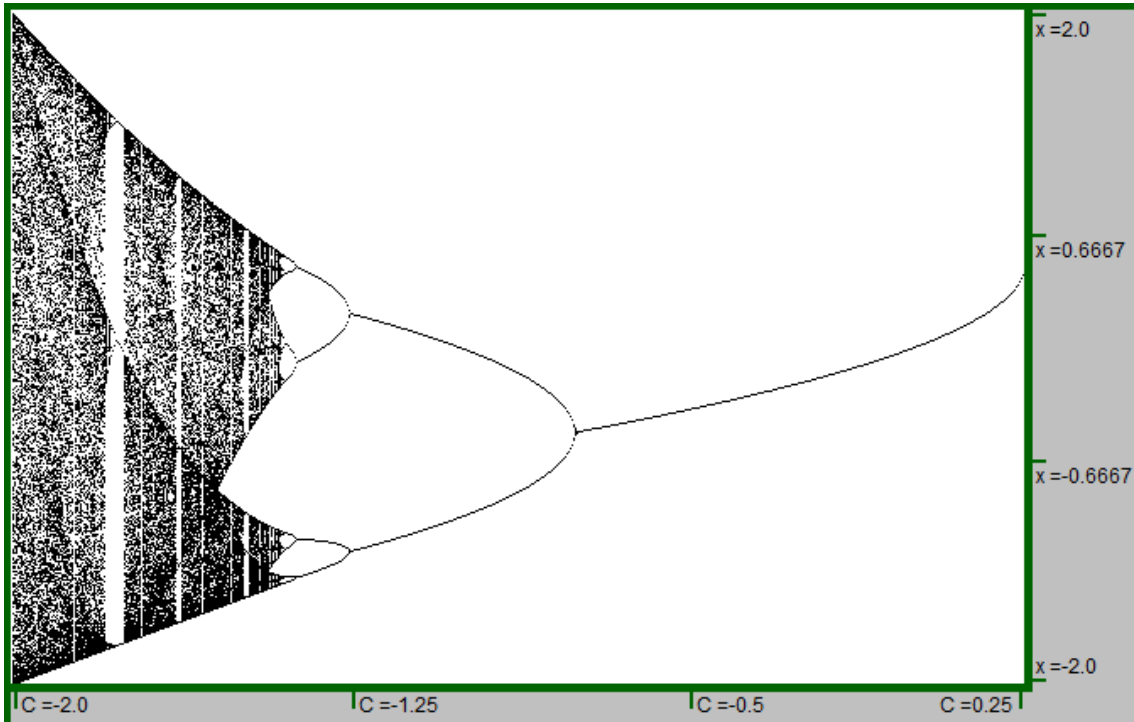
$$x_{n+1} = kx_n^2(2 - x_n^2)$$



$$x_{n+1} = -k|x_n - 0,5| + \frac{k}{2}$$



$$x_{n+1} = x_n^2 + k$$



$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -(y + z) \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c) \end{aligned}$$

Diagrama de Feigenbaum de l'atractor de Rössler variant b

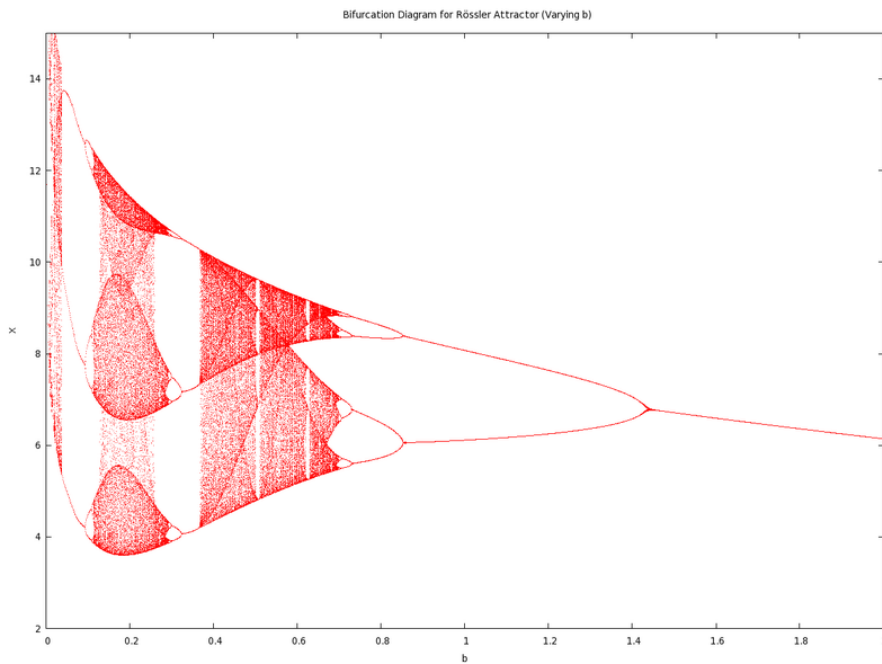
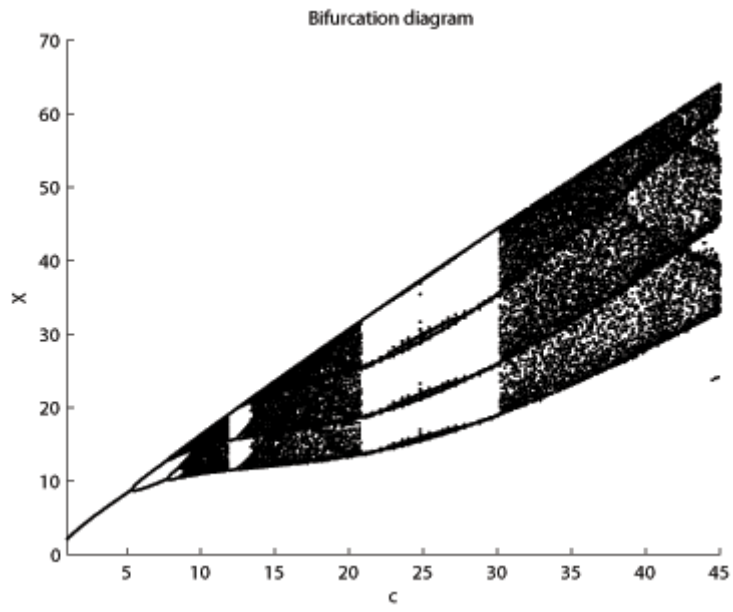


Diagrama de Feigenbaum de l'atractor de Rössler variant c



Annex 3: Experiència de la probabilitat invariant

Havíem dit que la probabilitat de trobar un cert valor al cap de n iteracions era invariant. Aquest és l'objectiu d'aquesta experiència, comprovar-ho.

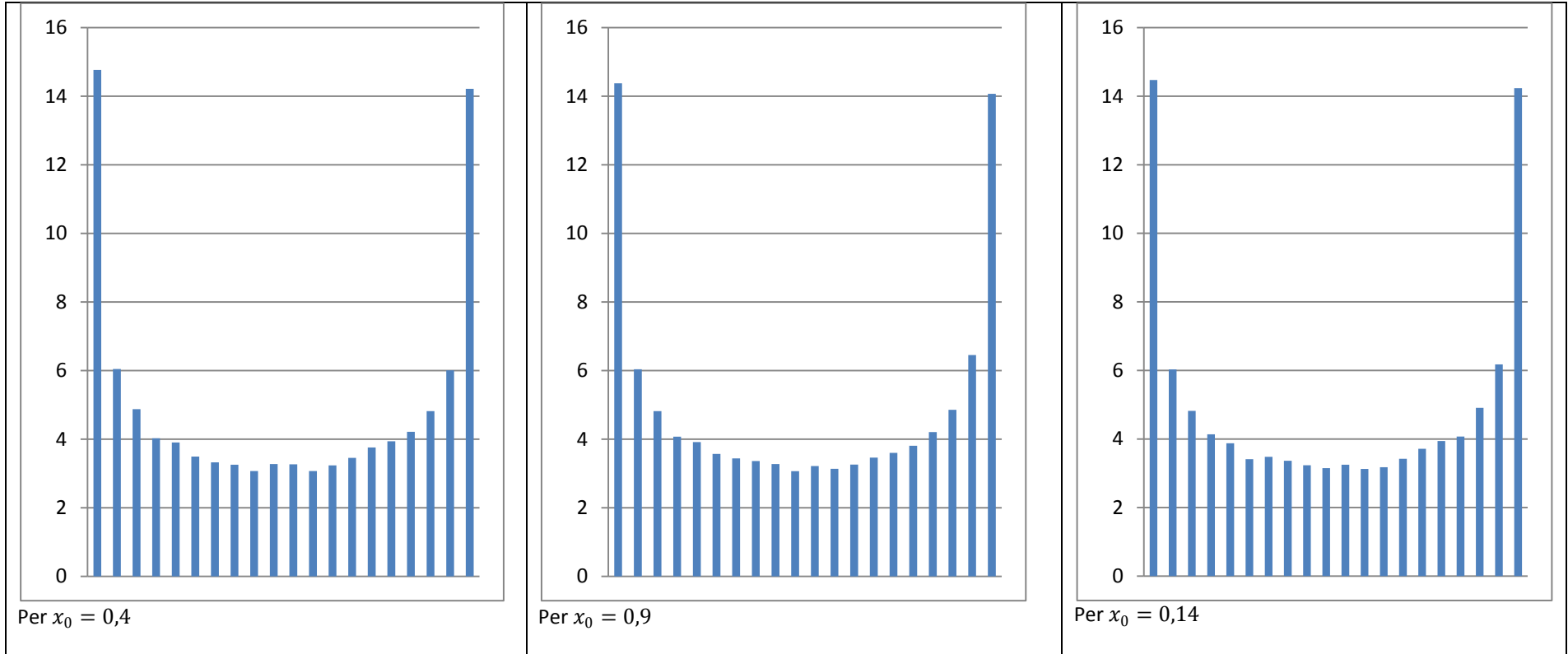
Per comprovar-ho he utilitzat el programa Microsoft Excel 2007. I l'he realitzat de la manera següent.

En la primera columna he posat el nombre d'iteracions (0,1,2,...). En la segona columna itero la funció logística ($=D3*B2*(1-B2)$, $=D4*B3*(1-B3)$...) $D3$ és la k , que es pot variar a la quarta columna. I a la tercera columna he fet $=\text{COCIENTE}(B3*1000;50)/20$ al posar **COCIENTE** et dóna únicament la part entera del quocient, multiplicant el valor de la iteració de la funció logística per cert número i representar-lo com una divisió, la precisió ve indicada per el la part entera que posis en el **COCIENTE**, després ho divideixes pel mateix nombre pel qual ho havies multiplicat. D'aquesta manera anem transformant tots els valors en intervals en aquest cas en 20 intervals de 0,05 cadascú, en el meu cas l'interval [0,0.05), [0.05,0.1)...[0.95,1). En la següent columna he introduït $=\text{CONTAR.SI}(C2:C50002;0)$ la funció **CONTAR.SI** conta d'entre tots els valors que li has dit (en el meu cas des de C2 fins a C50002) el valor indicat en aquest cas el 0, repetim la operació per tots els intervals $=\text{CONTAR.SI}(C2:C50002;0,05)$... anant variant el valor indicat fins a completar tots els intervals. Després en la següent columna fem el tant per cent de cadascú. Ens donarà una taula semblant a aquesta:

iteració		k	Contar	% Interval
0	0,6	0,6	3,9	0 [0,0.05)
1	0,936	0,9	3,9	1415 2,83 [0.05,0.1)
2	0,2336256	0,2	3,9	3532 7,064 [0.1,0.15)
3	0,69827425	0,65	3,9	2162 4,324 [0.15,0.2)
4	0,82168056	0,8	3,9	1698 3,396 [0.2,0.25)
5	0,57143431	0,55	3,9	1512 3,024 [0.25,0.3)
6	0,95509884	0,95	3,9	2902 5,804 [0.3,0.35)
7	0,16725167	0,15	3,9	3297 6,594 [0.35,0.4)
8	0,54318635	0,5	3,9	3008 6,016 [0.4,0.45)
9	0,96772626	0,95	3,9	1977 3,954 [0.45,0.5)
10	0,12180536	0,1	3,9	1756 3,512 [0.5,0.55)
11	0,41717836	0,4	3,9	1562 3,124 [0.55,0.6)
12	0,94824825	0,9	3,9	1584 3,168 [0.6,0.65)
13	0,19138669	0,15	3,9	1658 3,316 [0.65,0.7)
14	0,60355551	0,6	3,9	1652 3,304 [0.7,0.75)
15	0,9331774	0,9	3,9	1852 3,704 [0.75,0.8)
16	0,24319362	0,2	3,9	1973 3,946 [0.8,0.85)
17	0,71779689	0,7	3,9	4561 9,122 [0.85,0.9)
18	0,79000162	0,75	3,9	5319 10,638 [0.9,0.95)
19	0,64700635	0,6	3,9	6581 13,162 [0.95,1)

Ara farem un gràfic per columnes dels valors del tant per cent.

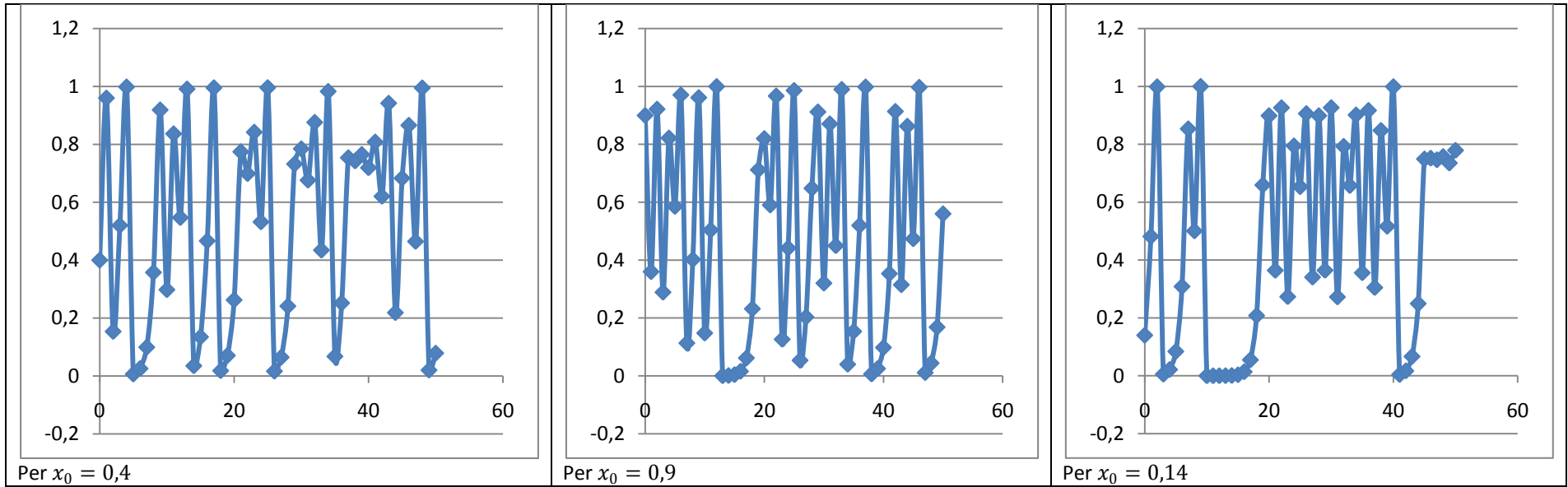
Observem per $k=4$ els valors de inici 0,4 0,9 i 0,14.



Aquí mostro les taules corresponents:

% interval		% interval		% interval		% interval					
14,766	[0,0.05)	3,266	[0.5,0.55)	14,378	[0,0.05)	3,218	[0.5,0.55)	14,47	[0,0.05)	3,248	[0.5,0.55)
6,046	[0.05,0.1)	3,07	[0.55,0.6)	6,038	[0.05,0.1)	3,136	[0.55,0.6)	6,032	[0.05,0.1)	3,128	[0.55,0.6)
4,876	[0.1,0.15)	3,234	[0.6,0.65)	4,818	[0.1,0.15)	3,258	[0.6,0.65)	4,82	[0.1,0.15)	3,176	[0.6,0.65)
4,028	[0.15,0.2)	3,454	[0.65,0.7)	4,072	[0.15,0.2)	3,462	[0.65,0.7)	4,138	[0.15,0.2)	3,424	[0.65,0.7)
3,904	[0.2,0.25)	3,756	[0.7,0.75)	3,914	[0.2,0.25)	3,602	[0.7,0.75)	3,874	[0.2,0.25)	3,714	[0.7,0.75)
3,492	[0.25,0.3)	3,938	[0.75,0.8)	3,57	[0.25,0.3)	3,808	[0.75,0.8)	3,412	[0.25,0.3)	3,942	[0.75,0.8)
3,322	[0.3,0.35)	4,214	[0.8,0.85)	3,44	[0.3,0.35)	4,208	[0.8,0.85)	3,482	[0.3,0.35)	4,072	[0.8,0.85)
3,254	[0.35,0.4)	4,818	[0.85,0.9)	3,362	[0.35,0.4)	4,854	[0.85,0.9)	3,366	[0.35,0.4)	4,908	[0.85,0.9)
3,072	[0.4,0.45)	6,006	[0.9,0.95)	3,274	[0.4,0.45)	6,452	[0.9,0.95)	3,234	[0.4,0.45)	6,178	[0.9,0.95)
3,272	[0.45,0.5)	14,214	[0.95,1)	3,068	[0.45,0.5)	14,07	[0.95,1)	3,15	[0.45,0.5)	14,234	[0.95,1)
Per $x_0 = 0,4$				Per $x_0 = 0,9$				Per $x_0 = 0,14$			

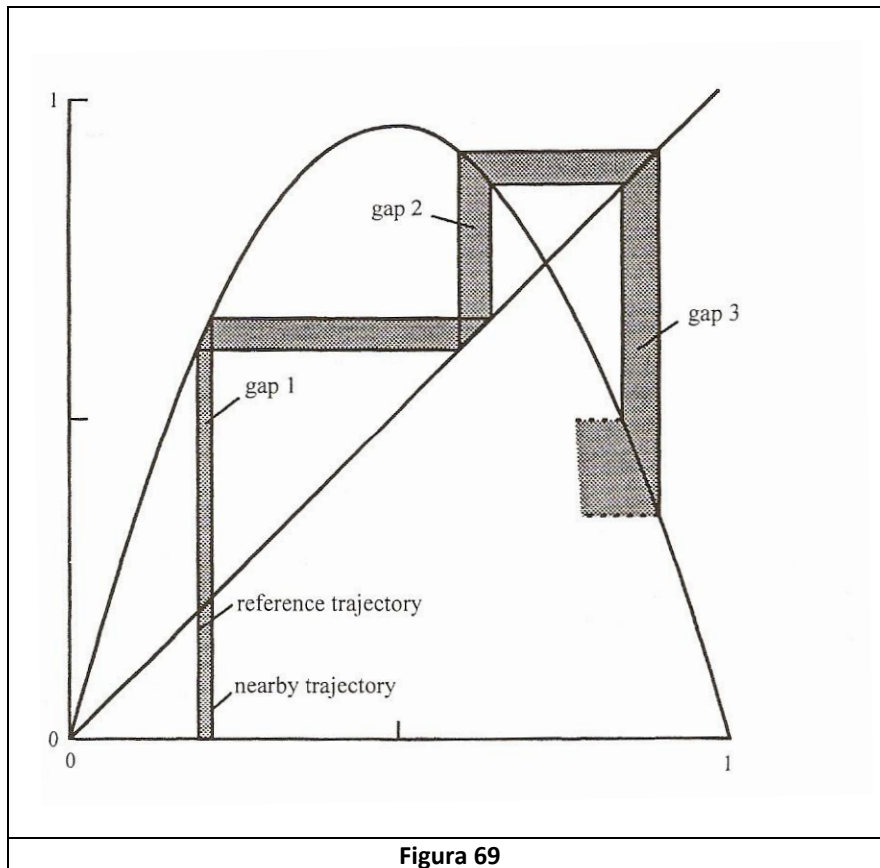
I veiem que en funció de les iteracions no són gens iguals:



Les diferències en les taules de la probabilitat són deguts a causa de que no fem infinites iteracions sinó 50000, tot i així ja es veu que la probabilitat és molt semblant i que si ho representem en funció de les iteracions es veu que no segueix cap patró. Al document de Excel de l'annex 3 del CD, es poden variar els valors inicials i la k i veure els gràfics mostrats en aquesta experiència.

Annex 4: Exponents de Lyapunov

Hem mostrat que els sistemes caòtics tenen una gran sensibilitat a les condicions inicials. Per quantificar com trajectòries molt properes se separen en l'espai de fases, el matemàtic rus Alexander Lyapunov (1857-1918) va formular uns exponents que mostraven com les òrbites se separaven.



En la gràfica de la figura 69 es pot veure com en la funció logística dos punts inicials molt propers van allunyant les seves òrbites.

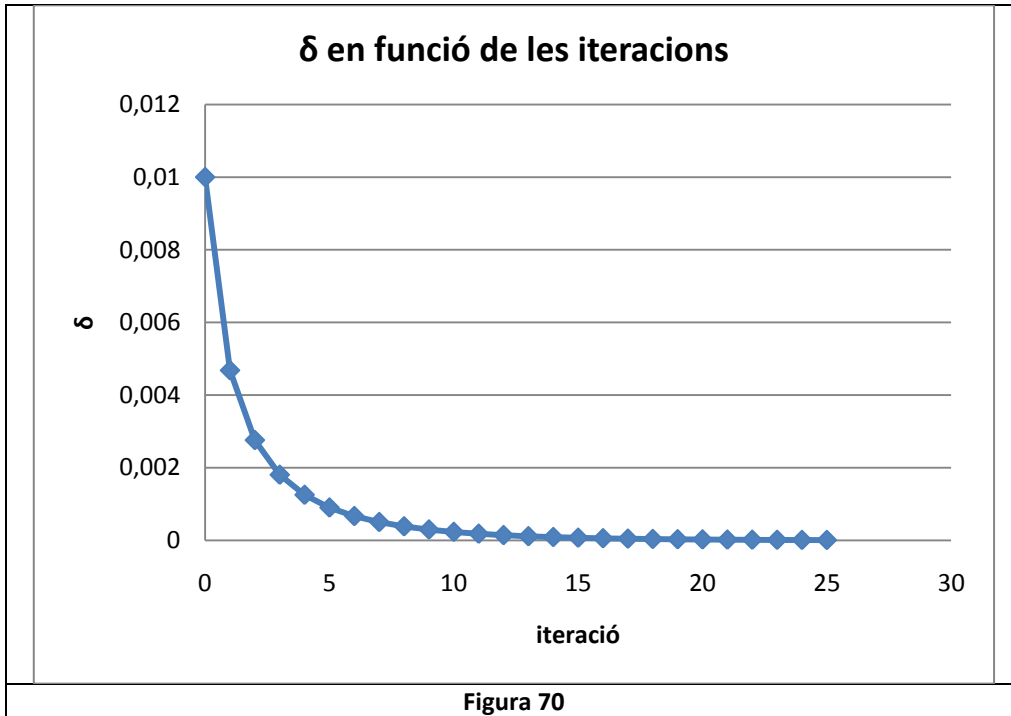
En aquest apartat amb δ ens referirem a la diferència que hi ha entre dos punts a l'espai de fases en el mateix temps.

Lyapunov va suggerir que la diferència entre les òrbites hauria de venir donada per:

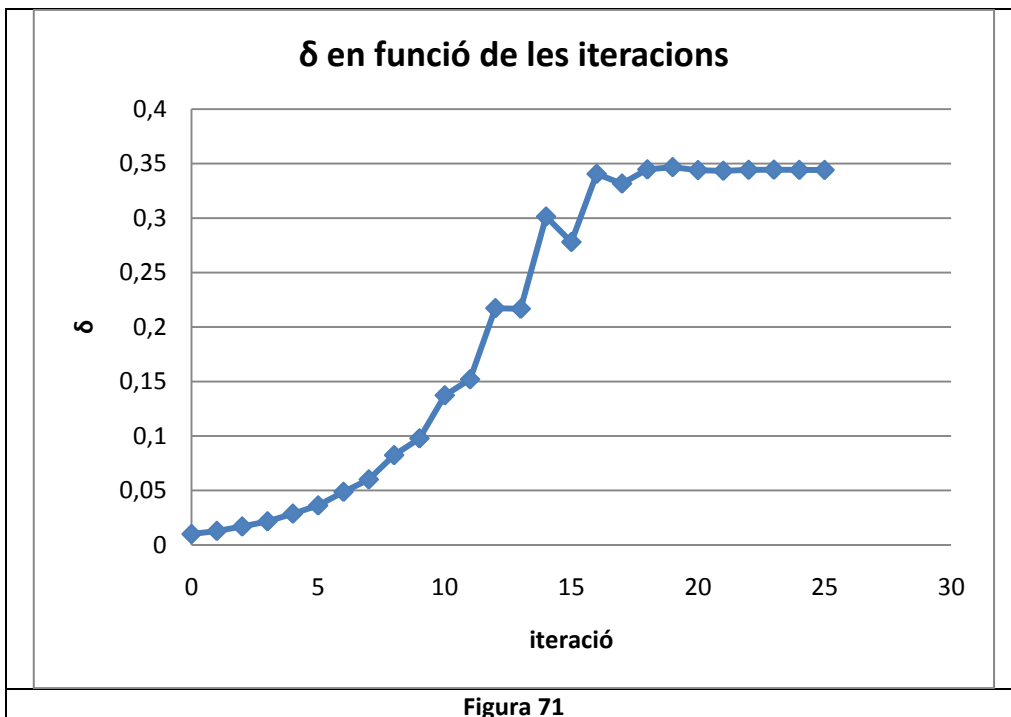
$$\delta_n = \delta_a e^{bn}$$

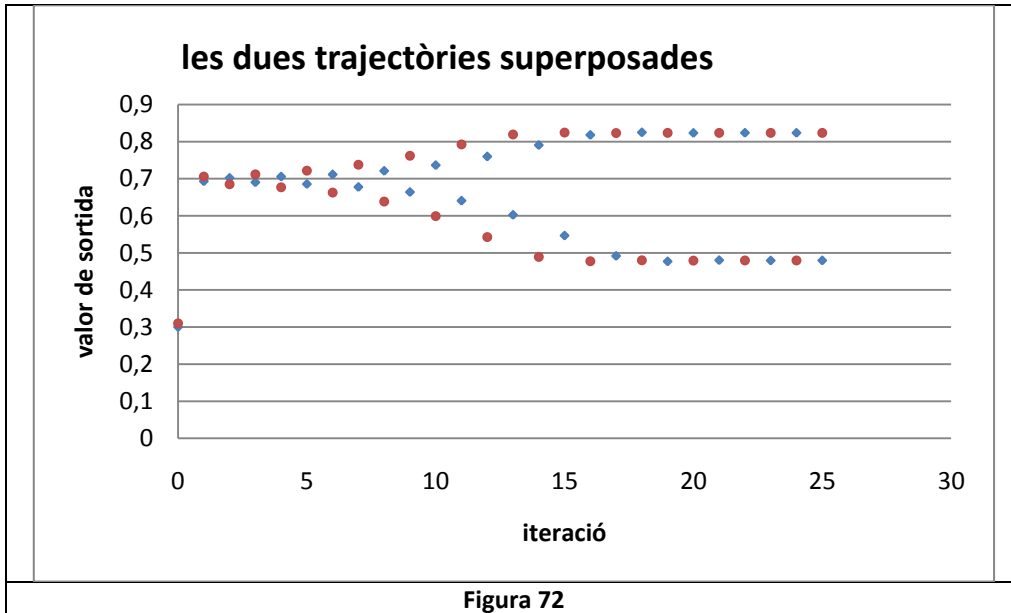
On n es el nombre d'iteracions, a el temps inicial.

Anem a la funció logística i mostrem δ per diferents k per exemple $k=1,2$ $k=3,3$

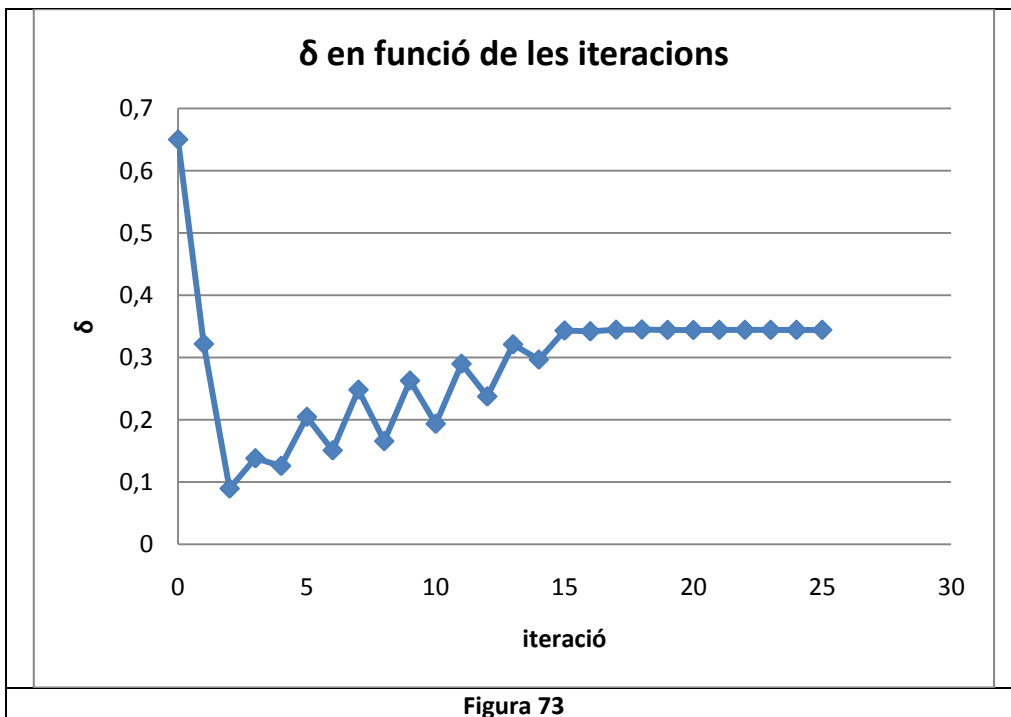


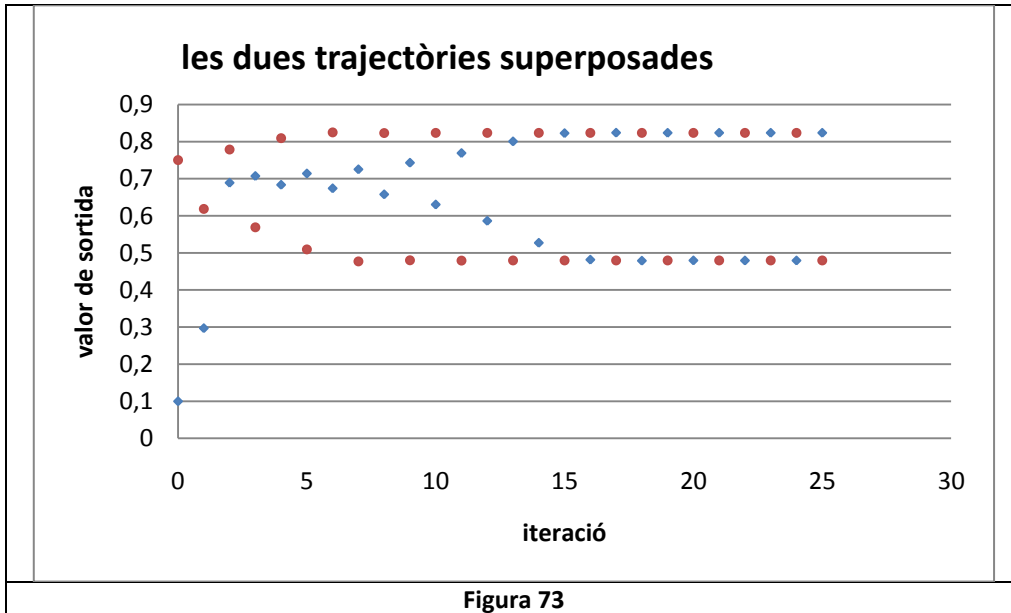
K=1,2 es veu clarament que les dues trajectòries convergeixen exponencialment. Hi ha un atractor. $(x_0 = 0,3 \quad x'_0 = 0,31)$





Pels mateixos punts d'inici veiem que la diferència va creixent fins a establir-se en la diferència que hi ha entre els dos atractors. Si canviem els punts inicials ara des de 0,1 i 0,75 veiem:



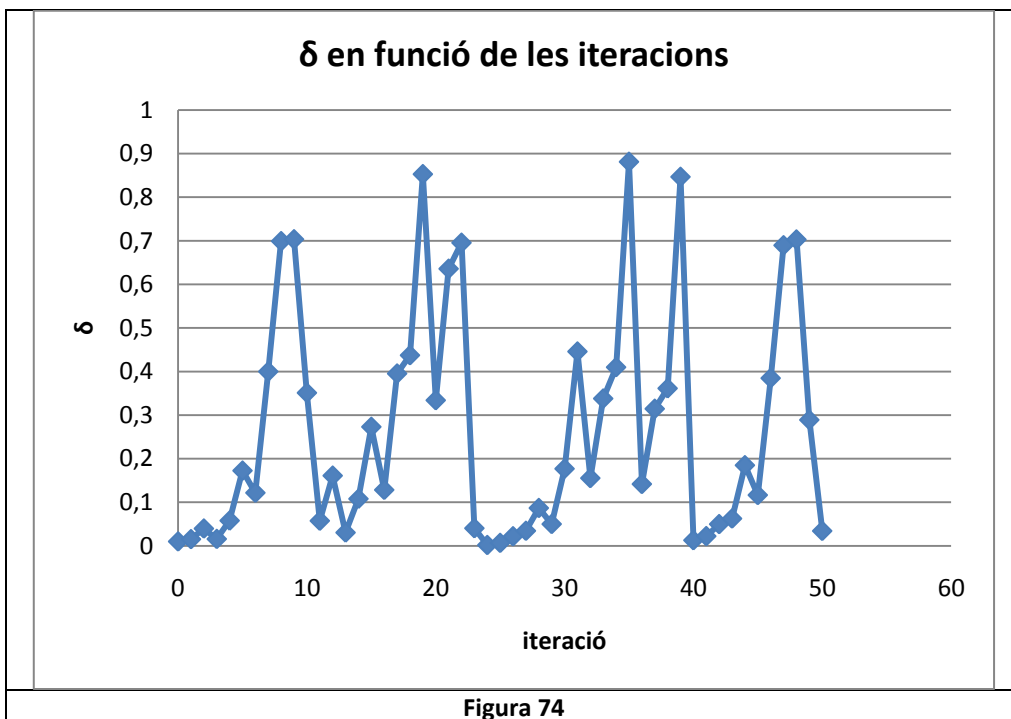


Al haver-hi dos atractors per $k=3,3$ les òrbites tendiran a mantenir una distància la que hi ha entre els dos atractors en aquest cas aproximadament 0,35. En aquest últim cas la diferència ha disminuït fins a ser la diferència entre els dos atractors.

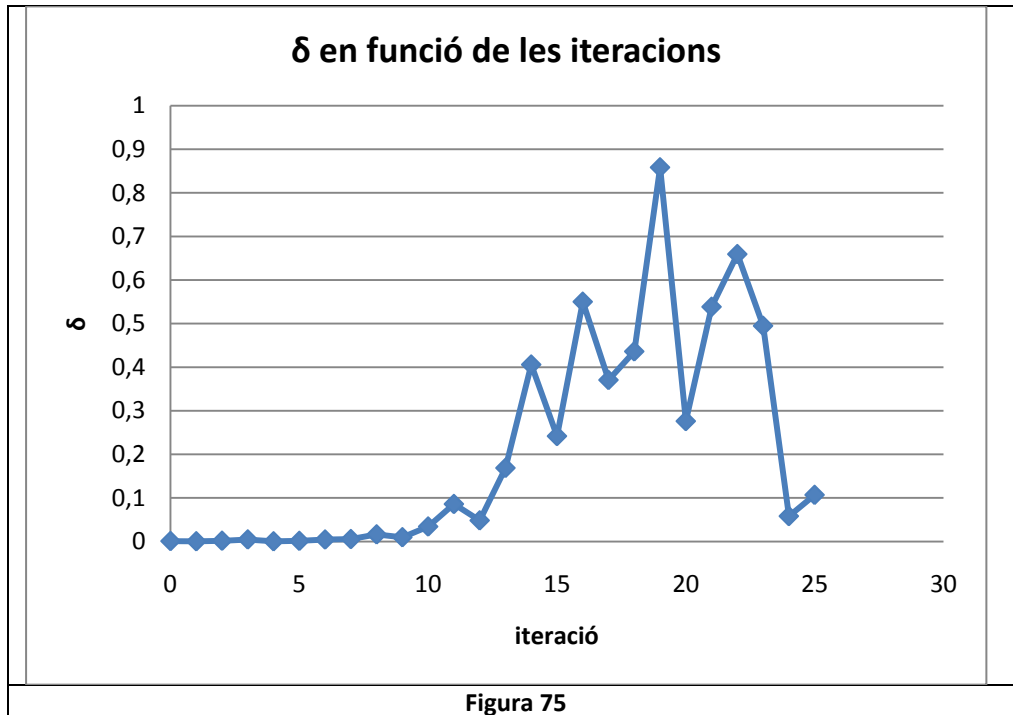
Per una k en règim caòtic

$k=3,92$

per $k=3,92$ obtenim el següent gràfic valors inicials de 0,3 i 0,31



I si ara escollim dos punts de partida diferents i separats amb menys distància per exemple 0,44 i 0,439

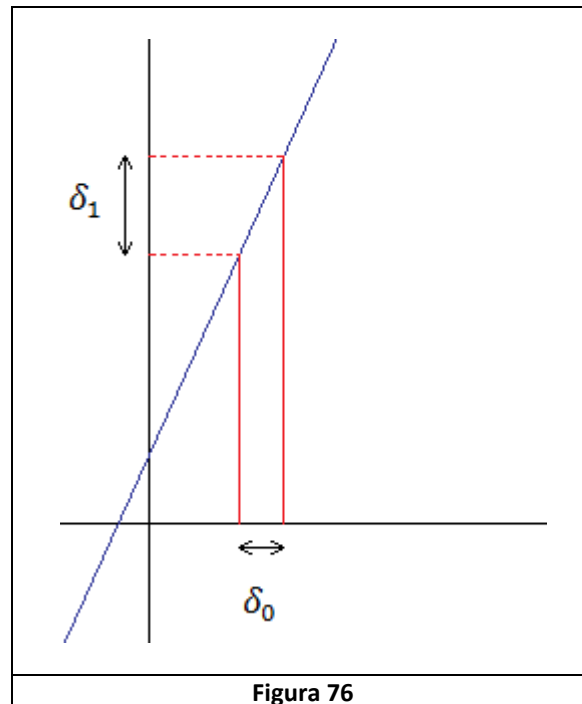


En les figures 74 i 75 es veu que la diferència va variant en funció de la iteració i no s'hi troba cap regularitat, és evident, no hi ha punts atractors. En aquest últim cas la diferència entre les òrbites era molt petita i ha anat creixent ràpidament. Aquí anem:

de l'expressió :

$$\delta_n = \delta_a e^{bn}$$

$$\frac{\delta_n}{\delta_0} = e^{bn}$$



Iterant gràficament (figura 76) es veu que δ_1 és la distància a l'ordenada respecte δ_0 . I si la diferència entre els dos punts la fem tendir a zero obtenim:

$$\lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \frac{\delta_1}{\delta_0} = f'(x_0)$$

Això seria el grau en que canvia en el primer punt.

El grau en que divergeix en el següent punt seria la derivada en el aquest punt.

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \frac{\delta_2}{\delta_1} = f'(x_1)$$

En la iteració 0 tenim x_0

En la iteració primera tenim $f(x_0) = x_1$

En la iteració segona tenim $f(f(x_0)) = x_2$

En la iteració tercera tenim $f(f(f(x_0))) = x_3$

En general a la n iteració tenim $f^n(x_0) = x_n$

Si volem conèixer el grau de divergència en la primera iteració farem:

$$\frac{d(f(x_0))}{dx} = f'(x_0)$$

En la segona iteració:

$$\frac{d(f^2(x_0))}{dx} = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = f'(x_1) \cdot f'(x_0)$$

En la tercera iteració:

$$\frac{d(f^3(x_0))}{dx} = f'(f(f(x_0))) \cdot f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = f'(x_2) \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_0)$$

Podríem dir que:

$$\frac{d(f^n(x_0))}{dx} = f'(x_{n-1}) \cdot \frac{d(f^{n-1}(x_0))}{dx}$$

$$\frac{d(f^3(x_0))}{dx} = \lim_{\delta_2, \delta_1, \delta_0 \rightarrow 0} \frac{\delta_3}{\delta_2} \frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{\delta_1}{\delta_0} = \lim_{\delta_2, \delta_1, \delta_0 \rightarrow 0} \frac{\delta_3}{\delta_0}$$

Generalitzant i considerant δ infinitèsim:

$$\frac{d(f^n(x_0))}{dx} = \frac{\delta_n}{\delta_0}$$

Tornant a l'expressió inicial, prenent logaritmes i aïllant b :

$$\frac{\delta_n}{\delta_0} = e^{bn}$$

$$\ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| = \ln e^{bn} = bn$$

$$b = \frac{\ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right|}{n}$$

Seguim considerant δ infinitèsim, per tant:

$$b = \frac{\ln \left| \frac{d(f^n(x_0))}{dx} \right|}{n}$$

Al realitzar la derivada ens trobarem amb expressions de l'estil $f'(x_2) \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_0)$ i com que $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ arribarem a una expressió com aquesta

$$b = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|}{n}$$

Cal recordar que hem de sumar des del zero fins a n-1 en lloc de n.

I si n tendís a infinit tindríem

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|}{n}$$

Ara fem una reflexió: si lambda és positiu implica que les trajectòries divergeixen, per contra si lambda és negatiu les trajectòries convergeixen això mateix es podia veure ja en la definició inicial.

$$\delta_n = \delta_0 e^{bn}$$

La lambda trobada per l'expressió de més amunt és l'exponent de Lyapunov si i només si la funció en qüestió només té una variable. Perquè si té més d'una variable en l'espai de fases la funció té més d'una dimensió i llavors pots derivar respecte altres eixos, fins i tot derivar respecte altres direccions. Els exponents de Lyapunov s'expressen ordenats de major a menor.

$$\{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n\}$$

Aquest conjunt se'n diu espectre de Lyapunov. Existeixen tants exponents com dimensions té l'espai de fases.

L'anomenat eix principal és l'eix pel qual en cada iteració la divergència és major, això implica que per més de 1 dimensió l'eix principal pot no coincidir en cap eix x,y,z i fins i tot anar variant la direcció. El major exponent de Lyapunov utilitza el sumatori dels valors més grans de divergència en cada iteració.

En un espai de fases n-dimensional, si considerem com a valors inicials un conjunt de punts que constitueixen una esfera (n-dimensional) infinitesimal i realitzéssim la primera iteració per tots aquests valors, observaríem com evoluciona aquesta n-esfera a per exemple un n-el·lipsoide degut a que pot haver un pendent més gran en una certa direcció respecte les altres. En les següents iteracions, l'n-el·lipsoide pot canviar l'orientació majoritària de creixement contínuament. Per això no es pot parlar d'una direcció definida associada a un determinat exponent de Lyapunov.

Hem vist que els exponents poden ser positius negatius però també poden ser zero, en aquest cas parlem d'estabilitat marginal on les diferències entre trajectòries veïnes (infinitesimalment separades) es mantenen constants.

$$\frac{\delta_n}{\delta_0} = e^{bn}$$

$$\frac{\delta_n}{\delta_0} = e^0$$

$$\delta_n = \delta_0$$

Els signes dels exponents de Lyapunov donen una idea del sistema, per exemple en un espai de fases de 3 dimensions, els tres exponents de Lyapunov negatius (−, −, −) indiquen un punt fix atractor. Una combinació de (0, −, −) indica un cicle, (+, 0, −) ens indica un atractor estrany.

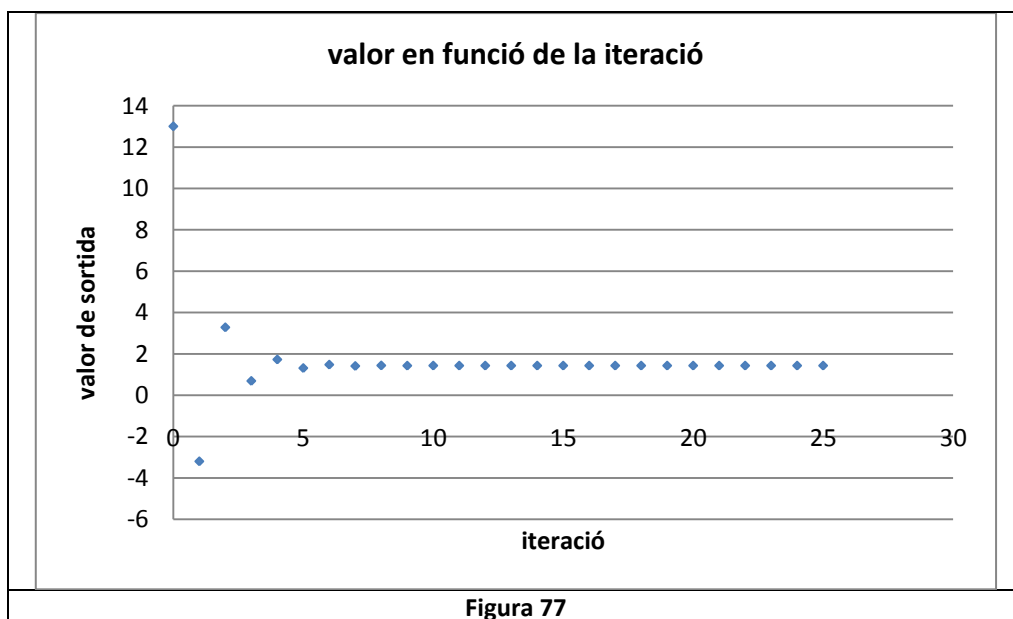
Ara calcularé una aproximació dels exponents de Lyapunov per diferents sistemes d'una variable.

$$x_{n+1} = -0,4x_n + 2$$

Al ser una recta la derivada sempre és −0,4 fent el valor absolut i fent-li el logaritme neperià:

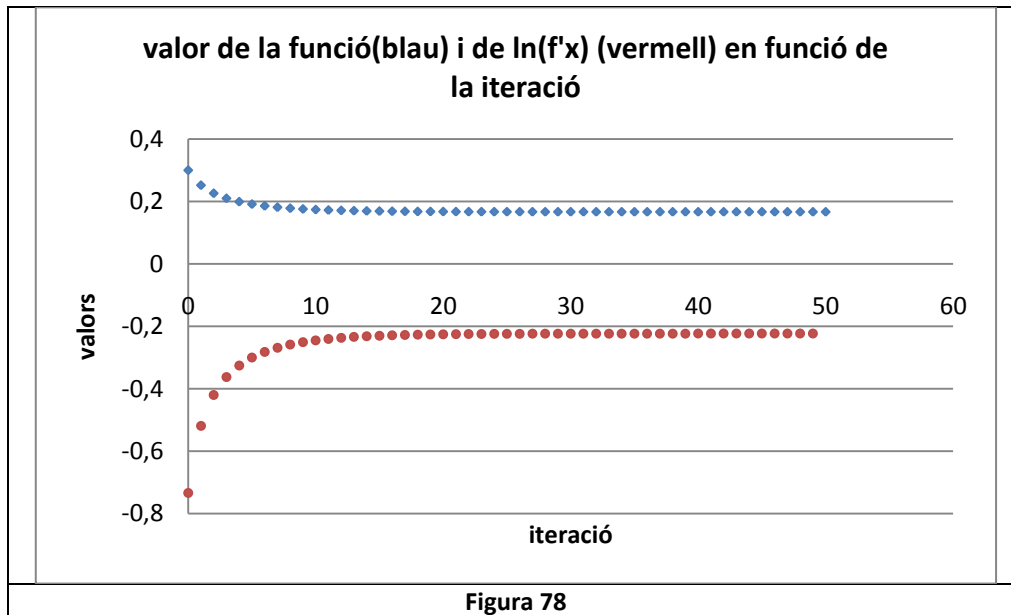
$$\lambda = \ln(0,4) = -0,9163$$

Aquest resultat indica que el sistema convergeix en un punt tal i com podem veure en la figura següent on s'itera la recta anterior.



Ara calculem aproximadament l'exponent de Lyapunov per la funció logística per els casos anteriors és a dir k=1,2 i k=3,3

Aquí la derivada anirà variant segons el punt ja que en la funció derivada hi ha una x per tant el valor serà aproximat ja que òbviament no podré fer infinites iteracions fent-ne unes 2000 ja obtinc un resultat relativament precís.



En aquest gràfic mostro en blau el valor de la funció en funció de la iteració i en vermell el valor del logaritme neperià del valor absolut de la derivada, que es veu clarament en aquest gràfic que el logaritme és sempre negatiu. Estan mostrades només 50 iteracions.

Després de sumar tots els logaritmes neperians de les derivades i fer-ne la mitjana em dona:

$$\lambda \approx -0,22394094$$

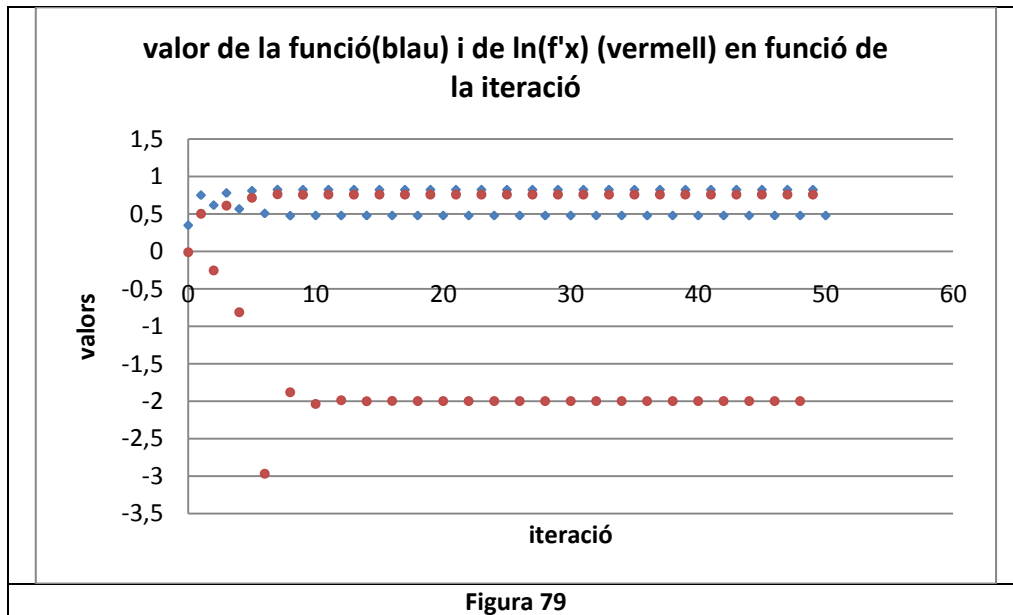
Per un altre punt d'inici em dona:

$$\lambda \approx -0,2225252$$

Resultat esperat ja que les òrbites convergeixen en un punt fix. Les diferències són degudes a que òbviament no faig infinites iteracions.

(en el document d'excel A4_Determinació_exponents_lyapunov contingut al CD es pot veure l'exponent de Lyapunov aproximat per cada k)

Ara provem per k=3,3



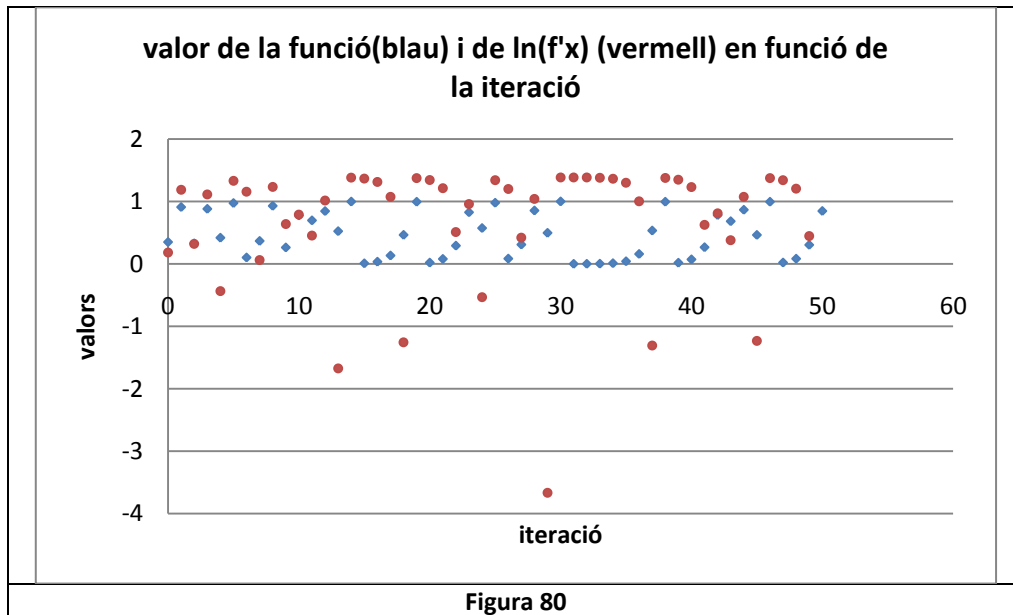
Es veu clarament el cicle i per dos valors inicials diferents amb 2000 iteracions em dona:

$$\lambda \approx -0,61714306$$

$$\lambda \approx -0,61255123$$

El sistema va a parar a un parell d'atractors i l'exponent de Lyapunov corrobora que convergeix.

Ara per k=4 en règim caòtic, esperem un exponent positiu ja que les òrbites divergeixen presentant una gran sensibilitat a les condicions inicials.



Es veu que no hi ha cap regularitat en les 50 primeres iteracions com estem acostumats a veure. Però en canvi si ens hi fixem els logaritmes de les derivades generalment són positius.

I ara per 10000 iteracions per dos valors d'inici diferents he trobat els següents valors de l'exponent per k=4

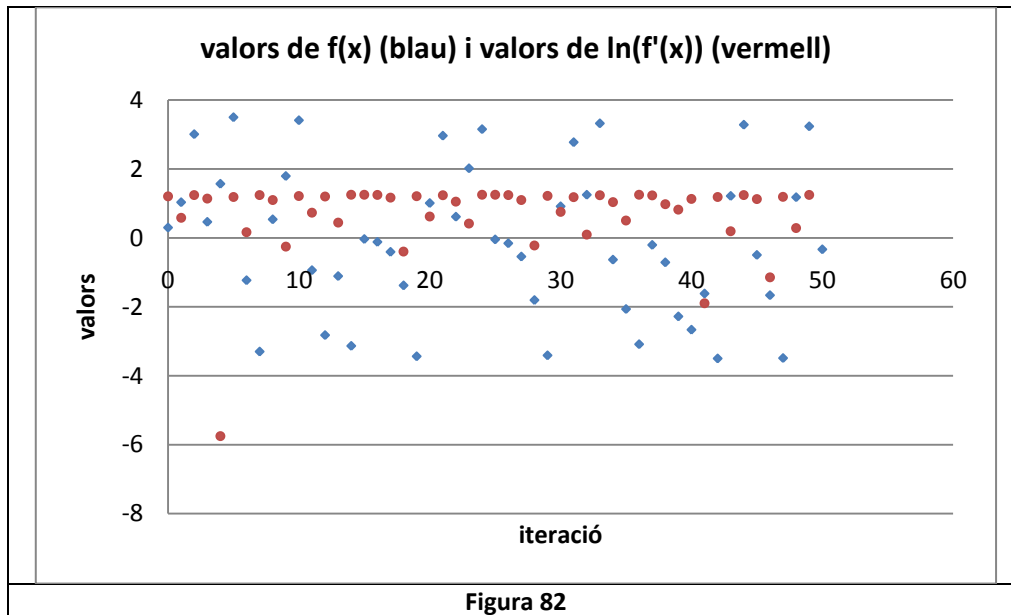
$$\lambda \approx 0,69313623$$

$$\lambda \approx 0,6931319$$

L'exponent és positiu tal i com esperàvem. En un atractor caòtic l'exponent no depèn del valor inicial sinó que és característic per cada atractor ja que un atractor estrany és un atractor de període infinit i comencem on comencem entrarem al atractor i obtindrem el mateix exponent.

Mostraré un últim exemple per una altre funció caòtica per exemple

$$f(x) = 3,5 \sin^2(x)$$



Es veu clarament que en general després de fer el logaritme del valor absolut de la derivada el resultat dóna positiu.

Per a les aproximacions dels exponents de Lyapunov he necessitat 300000 iteracions per tenir una miqueta de precisió i dos mostres d'aproximacions són:

$$\lambda \approx 0,77206264$$

$$\lambda \approx 0,77071747$$

L'exponent de Lyapunov et dóna una idea de com de ràpid el sistema convergeix o divergeix. Això és útil a l'hora de fer prediccions, com per exemple del temps, saber més o menys fins quan pots predir amb prou exactitud en relació als instruments de mesura que tens.

No s'ha acabat de trobar un bon mètode pel càlcul dels exponents de Lyapunov.

Ara calcularé una mena d'exponent de Lyapunov per l'atractor d'Hénon (dos variables) però per quantificar el caos no donaré un parell d'exponents sinó només un com a indicador, resultat d'una experiència que he ideat. Recordo que és una idea basada en l'exponent de Lyapunov.

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|}{n}$$

D'aquesta expressió la derivada sorgeix de que la diferència entre els dos punts es pràcticament zero, doncs jo començaré per un parell de nombres x y i els hi realitzaré la primera iteració

$$x_{n+1} = y_n + 1 - 1,2x_n^2$$

$$y_{n+1} = 0,4x_n$$

$$y_0 = 0,01 \quad x_0 = -0,1233$$

iteració	x	y
0	-0,1233	0,01
1	0,99175653	-0,04932
2	-0,22961722	0,39670261
3	1,33343373	-0,09184689
4	-1,2255015	0,53337349
5	-0,26885123	-0,4902006
6	0,42306222	-0,10754049
7	0,67768154	0,16922489
8	0,61812216	0,27107262
9	0,81258261	0,24724886
10	0,45490027	0,32503304

Taula 9

Ara realitzem la primera iteració igual però incrementem la x i la y un valor de l'ordre de 10^{-11} . I obtindrem un parell de nombres molt semblants. Al fer la nova iteració 2 agafarem els valors de la iteració 1 de la primera prova i incrementem altre vegada y i x el mateix valor petit (10^{-11}) i ens dóna un parell de valors més. Anem repetint la operació al mateix temps que la primera i ens dóna una taula com aquesta:

iteració	x	y	x'	y'
0	-0,1233	0,01		
1	0,99175653	-0,04932	0,98871595	-0,03699
2	-0,22961722	0,39670261	-0,42633343	0,29752696
3	1,33343373	-0,09184689	1,32288892	-0,06888517
4	-1,2255015	0,53337349	-1,58111061	0,40003012
5	-0,26885123	-0,4902006	-0,56922202	-0,36765045
6	0,42306222	-0,10754049	0,40860602	-0,08065537
7	0,67768154	0,16922489	0,64188521	0,12691866
8	0,61812216	0,27107262	0,52627171	0,20330446
9	0,81258261	0,24724886	0,73616761	0,18543665
10	0,45490027	0,32503304	0,32284217	0,24377478
11	1,07671193	0,18196011	1,03532508	0,13647008
12	-0,2092102	0,43068477	-0,44107192	0,32301358
13	1,37816208	-0,08368408	1,3694083	-0,06276306
14	-1,36288096	0,55126483	-1,74274711	0,41344863
15	-0,67766857	-0,54515238	-1,04915748	-0,40886429

Taula 10

Ara del que es basa es de mesurar la diferència inicial i final que hi ha a l'espai de fases entre les dues trajectòries i dividir la final entre la inicial

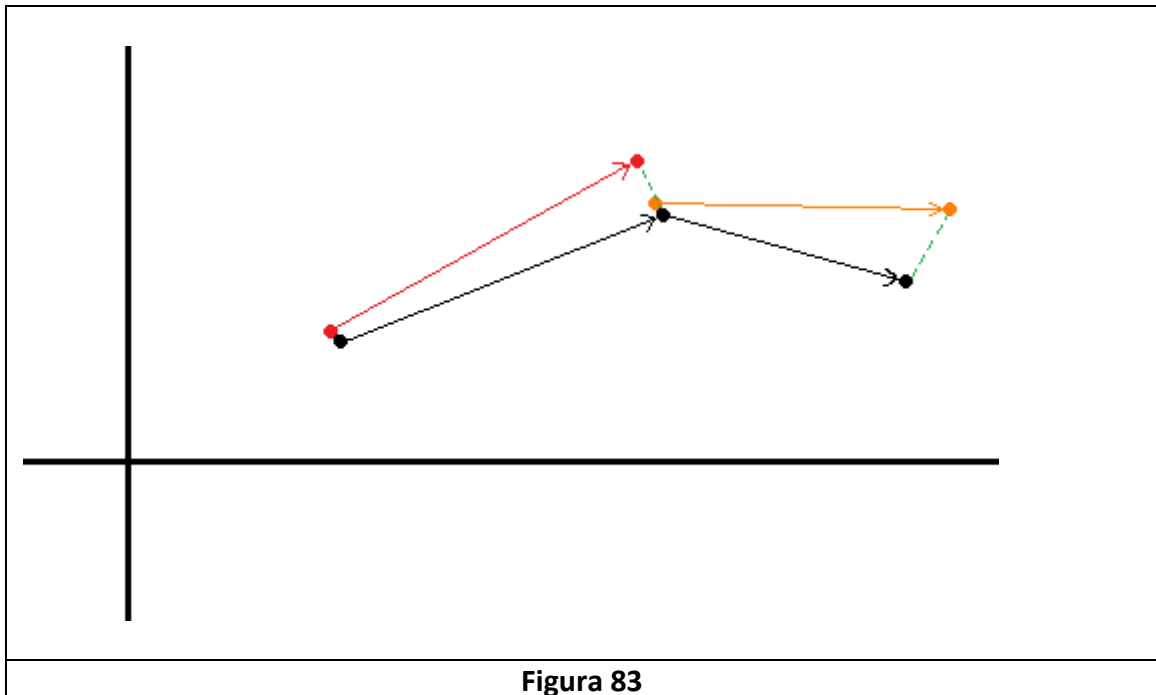


Figura 83

La figura 83 representa un exemple d'aquesta experiència. El pla representa l'espai de fases. Els punts amb negre són els de la iteració "normal", comencem per el de més a l'esquerra i seguint les fletxes. El punt vermell és un punt molt pròxim al primer punt negre. Aquest punt s'itera i origina el seguit per la fletxa que distancia més o menys que la distància inicial i això és el que intentaré quantificar. Després d'obtenir el segon punt negre creo un altre punt molt proper a aquest segon el taronja i l'itero i comparo de nou la distància inicial entre els dos punts abans i després de iterar.

La distància entre els punts no és més que res que el teorema de Pitàgores.

$$\text{distància} = \sqrt{(\text{diferència de les } x)^2 + (\text{diferència de les } y)^2}$$

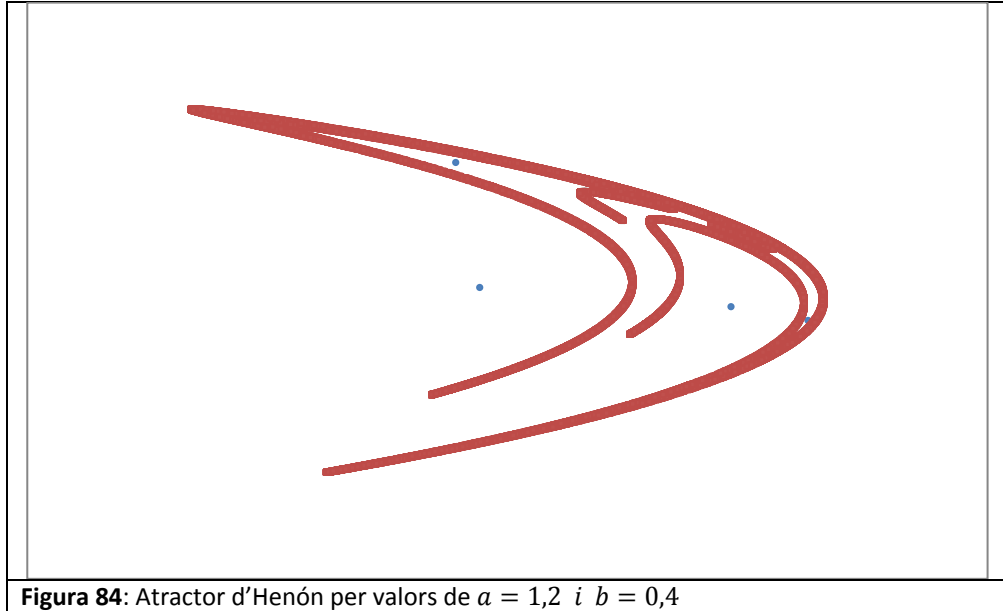
Després faré el mateix que Lyapunov i faré el logaritme neperià dels valors obtinguts de les divisions i després el sumatori de tots ells i dividits per n.

Iteració	x	y	x'	y'	increment x	increment y	diferència inicial	diferència final	rang de creixemet		exponent indicador
0	-0,1233	0,01					1,41421E-10			ln del rang	
1	0,99175653	-0,04932	0,98871595	-0,03699	0,00304058	-0,01233	1,41421E-10	0,012699371	89798110,9	18,3130745	20,3345421
2	-0,22961722	0,39670261	-0,42633343	0,29752696	0,1967162	0,09917565	1,41421E-10	0,220302236	1557772048	21,1665225	
3	1,33343373	-0,09184689	1,32288892	-0,06888517	0,01054481	-0,02296172	1,41421E-10	0,025267247	178666419	19,001031	
4	-1,2255015	0,53337349	-1,58111061	0,40003012	0,3556091	0,13334337	1,41421E-10	0,379787163	2685500783	21,7111331	
5	-0,26885123	-0,4902006	-0,56922202	-0,36765045	0,30037079	-0,12255015	1,41421E-10	0,324408923	2293917490	21,5535269	
6	0,42306222	-0,10754049	0,40860602	-0,08065537	0,0144562	-0,02688512	1,41421E-10	0,03052526	215846181	19,1900766	
7	0,67768154	0,16922489	0,64188521	0,12691866	0,03579633	0,04230622	1,41421E-10	0,05541835	391866908	19,7864328	
8	0,61812216	0,27107262	0,52627171	0,20330446	0,09185045	0,06776815	1,41421E-10	0,11414477	807125413	20,5089896	
9	0,81258261	0,24724886	0,73616761	0,18543665	0,076415	0,06181222	1,41421E-10	0,098285312	694982105	20,3593967	
10	0,45490027	0,32503304	0,32284217	0,24377478	0,1320581	0,08125826	1,41421E-10	0,155055624	1096408830	20,815306	
11	1,07671193	0,18196011	1,03532508	0,13647008	0,04138685	0,04549003	1,41421E-10	0,061499708	434868603	19,8905545	
12	-0,2092102	0,43068477	-0,44107192	0,32301358	0,23186172	0,10767119	1,41421E-10	0,255642215	1807663440	21,3153009	
13	1,37816208	-0,08368408	1,3694083	-0,06276306	0,00875378	-0,02092102	1,41421E-10	0,022678575	160361741	18,8929427	
14	-1,36288096	0,55126483	-1,74274711	0,41344863	0,37986615	0,13781621	1,41421E-10	0,40409355	2857372891	21,7731685	
15	-0,67766857	-0,54515238	-1,04915748	-0,40886429	0,3714889	-0,1362881	1,41421E-10	0,395699948	2798021163	21,7521783	
16	-0,09623402	-0,27106743	-0,18808096	-0,20330057	0,09184694	-0,06776686	1,41421E-10	0,114141172	807099968	20,5089581	
17	0,71781939	-0,03849361	0,71596719	-0,02887021	0,0018522	-0,0096234	1,41421E-10	0,009800025	69296644,7	18,053907	
18	0,34318879	0,28712775	0,24013585	0,21534582	0,10305293	0,07178194	1,41421E-10	0,125588829	888047128	20,6045354	
19	1,1457935	0,13727551	1,12223779	0,10295664	0,02355571	0,03431888	1,41421E-10	0,041625195	294334575	19,5002277	
20	-0,43813579	0,4583174	-0,70070434	0,34373805	0,26256855	0,11457935	1,41421E-10	0,286479792	2025718036	21,4291901	

Taula 11

L'exponent indicador de la taula no està fet sobre els 20 valors de la taula sinó per una mica més de 64000 valors, recordo que teòricament ho hauria de fer per infinits. I el resultat dona 20,3345421. Provant per diferents punts d'inici només he apreciat canvis en la mil·lèsima.

L'atractor d'Hénon per els valors de a i b que he escollit és:



Cal dir que per valors de $a = 1,4$ i $b = 0,3$ esperava un indicador positiu, però en canvi la prova no em va resultar i em donà un exponent indicador de -0,05124499

No sé ben bé a què és degut aquest resultat. La possibilitat de que fos perquè no realitzo infinites iteracions l'he descartada ja que per tots els valors d'inici que he provat resultava un exponent del mateix ordre els canvis es veien a la mil·lèsima.

En el document d'excel A4_Experiment_indicador_Hénon és possible repetir l'experiència modulant els paràmetres de a i de b i els valors inicials.

8. Bibliografia

- Robert L. Devaney & Jonathan Choate. CHAOS; A TOOL KIT OF DYNAMICS ACTIVITIES. 2000 Key Curriculum Press, Emeryville California.
- Garnet P. Williams. CHAOS THEORY TAMED. Joseph Henry press, Washinton D.C. ,1997
- Ian Stewart. ¿JUEGA DIOS A LOS DADOS? LA NUEVA MATEMÁTICA DEL CAOS. Editorial Crítica Barcelona, 1991.
- Nina Hall. EXPLORING CHAOS. A GUIDE TO HTE NEW SCIENCE OF DISORDER. Norton & Company New York, 1993
- Ivars Peterson. EL TURISTA MATEMÁTICO. Alianza Editorial, Madrid, 1992
- Xavier Pujol i Algué. ELS FRACTALS, UNA NOVA GEOMETRIA. Treball de Recerca, Manresa, 2002.
- Juan M. R. Parrondo. JUEGOS MATEMÁTICOS, CAOS DETERMINISMO Y VOLUNTAD. A INVESTIGACIÓN Y CIENCIA 310, juliol 2002 (p.86-87)
- William L. Ditto & Louis M. Pecora. DOMINAR EL CAOS. A INVESTIGACIÓN Y CIENCIA 205, octubre 1993 (p.48-55)
- James Gleik. CHAOS, THE AMAZING SCIENCE OF THE UNPREDICTABLE. Vintage Gran Bretanya, 1998.
- Leonard Smith. CHAOS: A VERY SHORT INTROCUCTION. Oxford University Press, New York, 2007
- Douglas R. Hofstadter. TEMAS METAMÁGICOS, LOS ATRACTORES EXTRAÑOS SON CONFIGURACIONES MATEMÁTICAS EN EQUILIBRIO ENTRE ORDEN Y CAOS. A INVESTIGACIÓN Y CIENCIA 64, gener 1982 (p.103-113)
- Dan Kalman, UNCOMMON MATHEMATICAL EXCURSIONS: POLYNOMIA AND RELATED REALMS, The Mathematical Association of America, 2009
- Dan kalman, ELEMENTARY MATHEMATICAL MODELS: ORDER APLENTLY AND A GLIMPSE OF CHAOS. The Mathematical Association of America, 1997
- Edward B. Burger & Michael Starbird. COINCIDENCES, CHAOS, AND ALL THAT MATH JAZZ. W.W.Norton and Company Inc. New York, 2005
- <http://math.bu.edu/DYSYS/applets/> (consultada gener 2010)
- http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory (consultada gener 2010)
- <http://en.wikipedia.org/wiki/Attractor> (consultada gener 2010)
- <http://www.ocf.berkeley.edu/~trose/rossler.html#strange> (consultada gener 2010)
- <http://mathworld.wolfram.com/NewtonsMethod.html> (consultada gener 2010)
- <http://www.uv.es/diaz/mn/node20.html> (consultada gener 2010)
- <http://mathworld.wolfram.com/StrangeAttractor.html> (consultada gener 2010)
- <http://mathworld.wolfram.com/Attractor.html> (consultada gener 2010)
- <http://mysite.verizon.net/dan.kalman/ume/newton/> (consultada gener 2010)
- <http://www.youtube.com/watch?v=JnlkKdDXk-I> (consultada gener 2010)
- <http://www.youtube.com/watch?v=Qe5Enm96MFQ> (consultada gener 2010)
- <http://calculadora.edu365.cat/wiris/ca/index.html> (utilitzada gener 2010)